

Government of Tamilnadu

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

(MATHEMATICS - KANNADA)

X- STANDARD

Untouchability
Inhuman- Crime

Department of School Education

A Publication Under
Government of Tamilnadu
Distribution of Free Textbook Programme
(NOT FOR SALE)

First Edition - 2011
(This Book published under Uniform System of School Education scheme)

TRANSLATORS

Thiru S. JAGADEESH

(Assistant Headmaster)
P.G. Assistant
Govt. Hr. Sec. School
Panakahalli - 638 461
Erode (Dt.)

Thiru K. MADAIAH

B.T. Assistant
Govt. High School
Chikkahalli - 638 461
Erode (Dt.)

Thiru S. SHASHIKANTH

B.T. Assistant
Govt. Hr. Sec. School
Thalavadi - 638 461
Erode (Dt.)

Laser Typeset : **S. Shivamurthy**

Layout and Wrapper Design : **V. James Abraham**

Textbook Printing

Tamilnadu Textbook Corporation,
College Road, Chennai - 600 006.

Price : Rs.

This book has been printed on 80 G.S.M. Maplitho Paper

Printed by Offset at :

ಮುನ್ನುಡಿ

ತಮಿಳುನಾಡು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ತಂದಿದ್ದು, ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಕಾರಗಳಿಗೆ **ಏಕರೂಪ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ**ವನ್ನು ಜಾರಿಗೊಳಿಸಿರುವುದು ಸಂತೋಷದಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಇದು ತಮಿಳುನಾಡು ಸರ್ಕಾರವು ನೀಡುತ್ತಿರುವ ಸುವರ್ಣಾವಕಾಶವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣದ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಿದೆ.

ಎಲ್ಲಾ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಅರಸಿಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಉತ್ತಮ ಆಕರ್ಷಣೆಯೊಂದಿಗೆ ತನ್ನದೇ ಆದ ನೈಜ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದು, ಒಂದು ವಿಷಯವಾಗಿ ವಿಶಾಲವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಇದು ವಿಜ್ಞಾನಗಳು, ಇಂಜಿನೀಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರೆ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡ ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ತಂತ್ರಜ್ಞಾನದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ತನ್ನ ಆಯ್ಕೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಶೋಭಿಸಲು ಗಣಿತೀಯ ಜ್ಞಾನವು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ, ಗಣಿತೀಯ ತರಬೇತಿಯು ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ನೀಡುವುದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ ಶಿಸ್ತಿನ ಚಿಂತನೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ, ಜಟಿಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಕೂಡ ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಕಾಲಜ್ಞಾನಿಗಳಾದ ತಮಿಳು ಕವಿ, **ತಿರುವಳ್ಳುವರ್**ರವರು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ,

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு. – குறள் (392)

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಕ್ಷರಗಳು ಎರಡೂ
ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ಜನರ ಕಣ್ಣುಗಳು

– ಕುರಳ್ (392)

ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ಗಣಿತೀಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಮೌಲ್ಯ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಧಿಸುವ ಯಾವಾಗಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲು ಮತ್ತು ಪರಿಹರಿಸಲು ನಮಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಎದೆಗಾರಿಕೆಯು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಾಧನವು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಇದು ಪ್ರಧಾನ ಸೃಜನಾತ್ಮಕ ಬಲವಾಗಿದೆ. ಈ ಸತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಅಪಾರ ತೃಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಉಪಯೋಗಗಳಿಗಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಕಲಿಯಬೇಕು.

ಮೇಲಾಗಿ, ದೇಶದ ಮುಂದಿನ ಪೀಳಿಗೆಯನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಉತ್ತಮ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ತರಬೇತಿಯು ತುಂಬಾ ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳು ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗಕ್ಕೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಇತರೆ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತಳಹದಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸದೇ, ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಮೂಲ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಕಲಿಕೆಯ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖ ಅಂಗಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಒಂದು ಹೆಜ್ಜೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಿದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಹೇಗೆ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಾಯಿತು ಮತ್ತು ವಿಭಿನ್ನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ತಿಳಿಯಪಡಿಸಿದ ಜಾಗೃತಿಯನ್ನೂ ಸಹ ಇದು ಪೋಷಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಉತ್ತಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಮತ್ತು ತಾರ್ಕಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳ ಪೂರ್ಣ ಅರ್ಥೈಸುವಿಕೆಗೆ ಪ್ರೇರೇಪಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಾಗುವಷ್ಟು ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಒದಗಿಸುವಂತೆ ಅಧ್ಯಾಯದ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೋಗುವ ಮೊದಲು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಹಾಯದೊಂದಿಗೆ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಾವುಗಳೇ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು ಸಲಹೆ ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಿಗಿಲಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ಶಿಕ್ಷಕರು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ಅವರ ಸಹಾಯ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆಧಾರ ಗಣಿತದಿಂದ ಉನ್ನತ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬದಲಾವಣೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಶಿಕ್ಷಕರು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಉದ್ದೇಶವನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಕ್ರಿಯಾಕಾರಿಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಂಬುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಶಿಕ್ಷಕರು ದ್ವಿ–ಮಾರ್ಗ ಸಂವಹನಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಯತ್ನವು ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ–ಕೇಂದ್ರಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರೊಂದಿಗೆ, ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡುವ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವ ಗುರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನಾವು ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಗುವುದು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು, ಸ್ವತಃ ತಾವೇ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ನಂತರ ಸಂಬಂಧಿತ ಹೊಸ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವತಃ ತಾವೇ ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದು ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಬ್ಬರ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿವೆ.

"ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನಾವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ"

("We Learn Mathematics by doing Mathematics")

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಸುಧಾರಣೆಗಾಗಿ ಮೇಧಾವಿಗಳು, ಶಿಕ್ಷಕರು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಬರುವ ಸಲಹೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಮರ್ಶೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

ಮೂರ್ತಿ. ಆರ್.
ಅಧ್ಯಕ್ಷರು, ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಸಮಿತಿ.

ಪಠ್ಯವಸ್ತು (SYLLABUS)

ಅಧ್ಯಾಯ	ವಿಷಯ	ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಕಲಿಕಾ ಫಲಗಳು	ವಿನಿಮಯ ಬೋಧನಾ ಕೌಶಲ	ಅವಧಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
I. ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು • ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು– ಉದಾಹರಣೆ, ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಶೀಲನೆ • ಗಣಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆಗೆ ಸೂತ್ರ • ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	• ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಮೂಲ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದು. • ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ, ಸಹವರ್ತನೀಯ ಮತ್ತು ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು – ಗಣಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಗಣಗಳ ಪೂರಕತೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆ ನೀಡುವುದು. • ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವಾಕ್ಯ ರೂಪಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು. • ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ವಿಧಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿನಿಧಿಕರಣವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವಿಧಗಳನ್ನು ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅರ್ಥೈಸುವುದು.	• ಎಲ್ಲಾ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಣಗಳಿಗೆ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ಔಷಧ ವಿಜ್ಞಾನ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ.	26
II. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ಶ್ರೇಢಿಗಳು • ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ (A.P) • ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (G.P) • ಶ್ರೇಣಿಗಳು	• ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಕೆಲವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.	• ನಮೂನೆಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ಚುಕ್ಕೆ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಬೋಧನಾ ಉಪಕರಣವಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. • ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಲು ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕು.	27
III. ಬೀಜಗಣಿತ	• ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು • ಬಹುಪದಗಳು • ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ • ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.) ಮತ್ತು ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ಲ.ಸಾ.ಅ.) • ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು • ವರ್ಗಮೂಲ • ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು	• ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯ ಬಗೆಗಿನ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹರಿಸುವುದು. • ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಹುಪದದ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ.	• ದೃಷ್ಟಾಂತೀಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು – • ಚಿತ್ರಪಟಗಳನ್ನು ಬೋಧನಾ ಉಪಕರಣಗಳಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. • ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ.	

III. ಬೀಜಗಣಿತ		• ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು (ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ, ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು (ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ಮಾತ್ರ) ಪರಿಹರಿಸುವುದು. • ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಆಧಾರಿತವಾದ ವಾಕ್ಯ ರೂಪಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಶೋಧಕ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವದ ನಡುವಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. • ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. • ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಕಾಣಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿರಿ.	40
IV. ಮಾತೃಕೆಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು • ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ • ಗುಣಾಕಾರ • ಮಾತೃಕೆಯ ಸಮೀಕರಣ	• ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಲು ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಮತ್ತು ಕಳೆಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು. • ಕೊಟ್ಟಿರುವ (2x2; 2x3; 3x2) ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದು. • ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಪರಿಹರಿಸುವುದು.	• ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯತಾ–ಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. • ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಅಂಕಗಣಿತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.	16

V. ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	• ಪೀಠಿಕೆ • ಪುನರಾವರ್ತನೆ : ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ • ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ, ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ಸೂತ್ರ, ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಸೂತ್ರ • ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ • ಸರಳರೇಖೆ	• ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು. • ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ವಿಭಜನೆಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು. • ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು. • ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯೊಂದಿಗೆ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಪ್ರವಣತೆ – ಛೇದಕ ರೂಪ, ಬಿಂದು – ಪ್ರವಣತೆ ರೂಪ, ಎರಡು ಬಿಂದು ರೂಪ, ಛೇದಕ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ (ii) ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.	• ಅನ್ವಯಗಳಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸರಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶ • $y = mx + c$ ರೂಪವನ್ನು ಆರಂಭವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.	25
VI. ರೇಖಾಗಣಿತ	• ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ) • ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ) • ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ – ಆಂತರಿಕ ಸಂಗತಿ ಮಾತ್ರ) • ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ (ಸಾಧನೆಯೊಂದಿಗೆ – ಆಂತರಿಕ ಸಂಗತಿ ಮಾತ್ರ) • ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (ಸಾಧನೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಪ್ರಮೇಯಗಳು)	• ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಹರಿಸಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.	• ಕಾಗದ ಮಡಚುವಿಕೆಯ ಸಮರೂಪತೆ ಮತ್ತು ವರ್ಗಾವಣಾ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಔಪಚಾರಿಕ (ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ) ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದು. • ಚಿತ್ರಗಳ ರಚನೆ • ಚಿತ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ವಿವರಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸುವುದು.	20
VII. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	• ಪೀಠಿಕೆ • ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು • ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು	• ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದು. (ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಮೀರದಂತೆ)	• ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು • ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು • ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು	21

VIII. ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	• ಪೀಠಿಕೆ • ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕು, ಗೋಳ, ಅರ್ಧ ಗೋಳ, ಛಿನ್ನಕಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ • ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ • ಅವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಘನಫಲ	• ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕು, ಗೋಳ, ಅರ್ಧ ಗೋಳ, ಛಿನ್ನಕಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು. • ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳ (ಎರಡು ಮಾತ್ರ) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ. • ಸ್ಥಿರವಾದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು.	• ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು 3–ಆಯಾಮ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ. • ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬೋಧನಾ ಉಪಕರಣಗಳಾಗಿ ಬಳಸಿರಿ. • ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿರಿ.	24
IX. ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	• ಪೀಠಿಕೆ • ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು • ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆ • ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ರಚನೆ	• ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಪಾದ, ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿರುವ ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು (a) ಮಧ್ಯ ರೇಖೆ (b) ಔನ್ನತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದದ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಪರಿಶೀಲನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು. • ರಚಿಸುವ ಮೊದಲು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಸಂಬಂಧಿತ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ. • ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಂಬಂಧಿತ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿರಿ.	15
X. ನಕ್ಷೆಗಳು	• ಪೀಠಿಕೆ • ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು • ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು	• ನಕ್ಷೆಗಳಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ವಾಕ್ಯ ರೂಪಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತಿಸಿರುವ ಕೌಶಲಗಳ ಮೇಲೆ ಗಮನವಿಡುವುದು. • ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು.	10
XI. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	• ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳ ಸ್ಮರಣೆ • ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು • ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ	• ವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸ್ಮರಿಸುವುದು. • ಹರವಿನ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಪ್ತಿ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು. • ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥರಾಗುವುದು.	• ಪರೀಕ್ಷೆ, ಕ್ರೀಡೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಣೆಗಳಂತಹ ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.	16
XII. ಸಂಭವನೀಯತೆ	• ಪೀಠಿಕೆ • ಸಂಭವನೀಯತೆ – ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಮಾರ್ಗ • ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ	• ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳು, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಹಾಗೂ ಘಟನೆಗಳು – ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ, ಪೂರಕ, ಖಚಿತ ಮತ್ತು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು. • ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದು ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.	• ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮುವುದು, ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳಿಂದ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ತನಿಖೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು.	15

ಪರಿವಿಡಿ

1

ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

A set is Many that allows itself to be thought of as a One
- Georg Cantor

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಗಣಗಳು
- ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು
- ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು
- ಉತ್ಪನ್ನಗಳು



ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲೆ (1815-1864)
ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್

ಬೂಲೆರವರು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಂಕೇತಗಳು ಮತ್ತು ತರ್ಕಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಂಕೇತಗಳ ನಡುವೆ ಸಾಮೀಪ್ಯ ಹೋಲಿಕೆಯಿರುವುದನ್ನು ನಂಬಿದ್ದರು.

ಇವರು ಗಣಿತದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತರ್ಕ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇವರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಸಹ, ಬೂಲಿಯನ್ ಬೀಜಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಗಣಕಗಳ ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಉತ್ಸುಕರಾಗಿದ್ದರು.

ಆಧುನಿಕ ಡಿಜಿಟಲ್ ಗಣಕಯಂತ್ರ ತರ್ಕದ ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಬೂಲಿಯನ್ ತರ್ಕವನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಬೂಲೆರವರನ್ನು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸ್ಥಾಪಕರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯು ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿದೆ. ಸಂಕೇತ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಗಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಭಾಷೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ವಿಷಯವು 19 ನೇ ಶತಮಾನದ ಉತ್ತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜಾರ್ಜ್ ಬೂಲೆ (1815-1864) ಮತ್ತು ಜಾರ್ಜ್ ಕ್ಯಾಂಟರ್ (1845-1918) ರವರ ಕಾರ್ಯದಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಯಿತು. ಇವರ ಅಗಾಧವಾದ ಪ್ರಭಾವವು 20 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಯಿತು. ಇದು ಹಲವಾರು ಸಂಬಂಧವಿಲ್ಲದ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಏಕೀಕರಿಸಲು ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದೆ.

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಗಣಗಳ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಎರಡು ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಗಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳು ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ. ನಾವು ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು (ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು) $\mathbb{N}$ ನಿಂದ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\mathbb{R}$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.2 ಗಣಗಳು (Sets)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮೂಹವೇ **ಗಣ**. ಗಣದಲ್ಲಿನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು **ಧಾತುಗಳು** ಅಥವಾ **ಗಣಾಂಶಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, "ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ" ಎಂದರೆ ವಸ್ತುವು ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲು ಮಾನದಂಡ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗೊಂದಲವಿಲ್ಲದೇ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚೆನ್ನೈನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ "ಎತ್ತರವಾದ ಜನರ" ಸಂಗ್ರಹ ಎಂಬುದು ಗಣವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮಾನದಂಡವಾದ "ಎತ್ತರವಾದ ಜನರು" ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಂಗ್ರಹವು ಗಣವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಕೇತ

ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಗಳನ್ನು A, B, X ಗಳಂತಹ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗಣದ ಧಾತುಗಳನ್ನು x, y ಗಳಂತಹ ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. x ಎಂಬುದು Y ಗಣದ ಧಾತು ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $x \in Y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. t ಎಂಬುದು Y ಗಣದ ಧಾತುವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $t \notin Y$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(i) ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

(ii) ತಮಿಳುನಾಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಅಥವಾ ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

(iii) ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಸರಿ (ಸಮ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

(iv) ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

(v) ಚಂದ್ರನಲ್ಲಿ ಪಾದಾರ್ಪಣೆ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಜನರ ಗಣ.

(i), (ii), (iii), (iv) ಮತ್ತು (v) ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C, D ಮತ್ತು E ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದು ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, ವರ್ಗವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, D ಗಣವು ಯಾವುದೇ ಧಾತುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿಯ ಯಾವುದೇ ಗಣವನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯ ಗಣವನ್ನು ϕ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(i) ಒಂದು ಗಣವು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಗಣವು ಪರಿಮಿತವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಗಣವು ಪರಿಮಿತ ಗಣ ಮತ್ತು C ಗಣವು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಶೂನ್ಯ ಗಣವು ತನ್ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶೂನ್ಯ ಗಣವು ಕೂಡ ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(i) X ಗಣವು ಪರಿಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, X ನ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು X ನಲ್ಲಿರುವ ಧಾತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗಣದ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು $n(X)$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) X ಗಣವು ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, X ನ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು ನಾವು ∞ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ A, B ಗಣಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು B ನ ಧಾತುವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ A ಯು B ನ ಉಪಗಣ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವ ಕೆಲವು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉಪಗಣ X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. X ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು Y ನ ಧಾತುವಾಗಿದ್ದರೆ, X ಗಣವು Y ನ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $z \in X$ ಎಂಬುದು $z \in Y$ ಎಂದಾದರೆ, X ಗಣವು Y ನ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣವು ತನ್ನದರ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

X ಎಂಬುದು Y ನ ಉಪಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು $X \subseteq Y$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಗಣದ ಸಮಾನತೆ X ಮತ್ತು Y ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಗಣಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $X = Y$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $X = Y$ ಆದರೆ, $X \subseteq Y$ ಮತ್ತು $Y \subseteq X$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

ಸಮಾನ ಗಣಗಳು $n(X) = n(Y)$ ಆದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಗಣಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $P = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ ಮತ್ತು $Q = \{3, -2\}$ ಆಗಿರಲಿ. P, Q ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $P = Q$. $F = \{3, 2\}$ ಆದರೆ, F, Qಗಳು ಸಮಾನ ಗಣಗಳು ಆದರೆ $Q \neq F$. ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಎರಡು ಅಪರಿಮಿತ ಸಮಾನ ಗಣಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

ಘಾತ ಗಣ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣ A. $P(A)$ ಎಂಬುದು A ನ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. $P(A)$ ಗಣವನ್ನು A ನ ಘಾತ ಗಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$n(A) = m$ ಆದರೆ, $P(A)$ ನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $n(P(A)) = 2^m$ ಆಗಿದೆ.

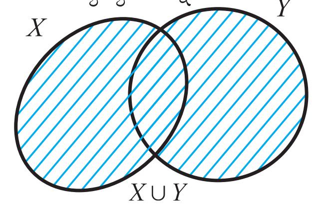
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \{a,b,c\}$ ಆದರೆ, $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}. \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $n(P(A)) = 8$.

ಈಗ, ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಂದ ಹೇಗೆ ಹೊಸ ಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೀರಿ?

ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯೆಂದರೆ ಎರಡೂ ಗಣಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಹಾಕುವುದು ಮತ್ತು ಹೊಸ ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯೆಂದರೆ ಎರಡೂ ಗಣಗಳಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಆದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಮಂಜಸವಾದ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಸೇರಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.3 ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (Operations on sets)

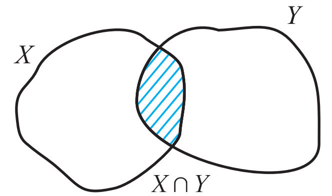
X ಮತ್ತು Y ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನ ಹೊಸ ಗಣಗಳನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 1.1

(i) **ಸಂಯೋಗ** $X \cup Y = \{z \mid z \in X$ ಅಥವಾ $z \in Y\}$

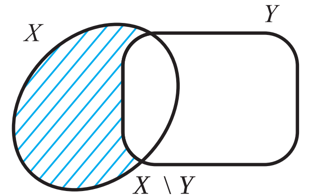
$X \cup Y$ ("X ಸಂಯೋಗ Y") ಎಂಬುದು X ನ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Y ನ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.1 ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $X \subseteq X \cup Y$ ಮತ್ತು $Y \subseteq X \cup Y$.



ಚಿತ್ರ 1.2

(ii) **ಛೇದನ** $X \cup Y = \{z \mid z \in X$ ಮತ್ತು $z \in Y\}$

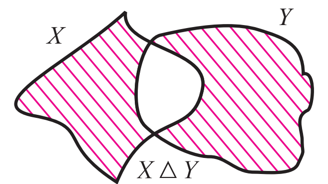
$X \cap Y$ ("X ಛೇದನ Y") ಎಂಬುದು X ಮತ್ತು Y ಗಳೆರಡರಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.2 ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, $X \cap Y \subseteq X$ ಮತ್ತು $X \cap Y \subseteq Y$.



ಚಿತ್ರ 1.3

(iii) **ಗಣದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** $X \setminus Y = \{z \mid z \in X$ ಆದರೆ $z \notin Y\}$

$X \setminus Y$ ("X ವ್ಯತ್ಯಾಸ Y") ಎಂಬುದು X ನಲ್ಲಿರುವ Y ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 1.3 ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಲೇಖಕರು $A \setminus B$ ಗೆ $A - B$ ನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಣದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಬಳಸುವ $A \setminus B$ ಸಂಕೇತವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸೋಣ.

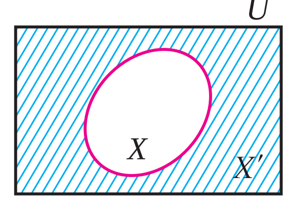


ಚಿತ್ರ 1.4

(iv) **ಸಮಮಿತ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$

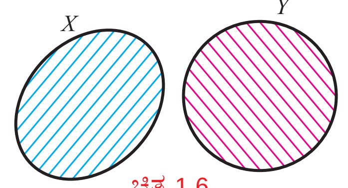
$X \triangle Y$ ("X ಸಮಮಿತ ವ್ಯತ್ಯಾಸ Y") ಎಂಬುದು $X \cup Y$ ನಲ್ಲಿರುವ ಆದರೆ $X \cap Y$ ನಲ್ಲಿರದ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(v) **ಪೂರಕ** $X \subseteq U$ ಆದರೆ, $U \setminus X$ ಎಂಬುದನ್ನು U ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ X ನ ಪೂರಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ U ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವ ಗಣ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಶ್ವ ಗಣವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದರೆ, $U \setminus X$ ನ್ನು X' ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು X ನ ಪೂರಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗಣ $A \setminus B$ ನ್ನು A ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ B ನ ಪೂರಕ ಎಂದೂ ಸಹ ಕಾಣಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1.5

(vi) **ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳು** X ಮತ್ತು Y ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವು (ಪ್ರತ್ಯೇಕ) ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಅವೆರಡು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಾರದು. ಅಂದರೆ, $X \cap Y = \phi$ ಆದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳಾದರೆ, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.6

ಗಮನಿಸಿ

ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ವೆನ್ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಆವೃತ ವಕ್ರವನ್ನು ಸಹ ಬಳಸಬಹುದು. ಗಣಗಳ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ನಾವು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ನಾವು ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

$A = \{x \mid x$ ಎಂಬುದು 12 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$ ಮತ್ತು $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B\}$
$= \{x \mid x$ ಎಂಬುದು 12 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಅಥವಾ $x = 12$, ಅಥವಾ $15\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ ಮತ್ತು $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ ಆದರೆ $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$
$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \mid x$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$ ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗಿರಲಿ.
0 ಯು ಧನಾತ್ಮಕವೂ ಅಲ್ಲ, ಋಣಾತ್ಮಕವೂ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $0 \notin A$.

ಈಗ, $A' = U \setminus A = \{x : x$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದರೆ ಇದು A ನಲ್ಲಿರಬಾರದು$\}$
$= \{x \mid x$ ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ 12 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುವ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$
$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$
$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

U ಎಂಬುದು ವಿಶ್ವಗಣ ಮತ್ತು A, B ಗಳು U ನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತವೆ.

(i) $A \setminus B = A \cap B'$ (ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$ (iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$ (vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

1.4 ಗಣ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of set operations)

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಗಣಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ.

(i) ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮ (Commutative property)

(a) $A \cup B = B \cup A$ (ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(b) $A \cap B = B \cap A$ (ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(ii) ಸಹವರ್ತನ ನಿಯಮ (Associative property)

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ)

(iii) ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ (Distributive property)

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (ಛೇದನವು ಸಂಯೋಗದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ)

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ಸಂಯೋಗವು ಛೇದನದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ)

ನಾವು ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸುವ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಉತ್ತಮವಾದುದು. ಆದರೆ ಇದು ಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಿಂದ ಹೊರತಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಕಠಿಣವಾದ ಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಮತ್ತು ಮೆಚ್ಚುಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ನೀಡೋಣ.

(i) ಸಂಯೋಗದ ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮ (Commutative property of union)

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ $A \cup B$ ಮತ್ತು $B \cup A$ ಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಗಣಗಳ ಸಮಾನತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಹೇಳುವಂತೆ ಎರಡು ಗಣಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಅವೆರಡು ಗಣಗಳು ಒಂದೇ ಧಾತುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

ನಾವು ಮೊದಲು $A \cup B$ ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು $B \cup A$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸೋಣ. $z \in A \cup B$ ಯು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ಧಾತುವಾಗಿರಲಿ. A ಮತ್ತು B ಗಳ ಸಂಯೋಗದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $z \in A$ ಅಥವಾ $z \in B$. ಅಂದರೆ,

ಪ್ರತಿಯೊಂದು $z \in A \cup B \implies z \in A$ ಅಥವಾ $z \in B$

$\implies z \in B$ ಅಥವಾ $z \in A$

$\implies z \in B \cup A$. $B \cup A$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ (1)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು $z \in A \cup B$ ಗೆ ಸಮೀಕರಣ (1) ನಿಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯವು $A \cup B$ ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು $B \cup A$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ, ಉಪಗಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ ಆಗಿದೆ.

ನಂತರ, ನಾವು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ $y \in B \cup A$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು y ಎಂಬುದು $A \cup B$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $y \in B \cup A \implies y \in B$ ಅಥವಾ $y \in A$

$\implies y \in A$ ಅಥವಾ $y \in B$

$\implies y \in A \cup B$. $A \cup B$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ (2)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು $y \in B \cup A$ ಗೆ ಸಮೀಕರಣ (2) ನಿಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯವು $B \cup A$ ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧಾತುವು $A \cup B$ ನ ಧಾತುವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ, ಉಪಗಣದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ ಮತ್ತು $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದು $(A \cup B) = (B \cup A)$ ಎಂದಾಗ ಮಾತ್ರ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಅದೇ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಸಾಧನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ (About proofs in Mathematics)

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು **ನಿಜ ಹೇಳಿಕೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವಾಗಿಯೇ ಇರಬೇಕು. ಹೇಳಿಕೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ನಿಜವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, ಆ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು **ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿದೆ.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

(iv) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣ A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ, $A \setminus B = B \setminus A$.

ಬಹಳಷ್ಟು ಬೆಸ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡ ಹೇಳಿಕೆ (i) ತಪ್ಪು. ಏಕೆಂದರೆ, $9, 15, 21, 45$ ಇತ್ಯಾದಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

ಹೇಳಿಕೆ (ii) ನಿಜ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ನೀವು ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೀರಿ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (iii) ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, 2 ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಸರಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. 2 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹೇಳಿಕೆ (iii) ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಇದು ಎಲ್ಲಿ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ತಿಳಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೇಳಿಕೆ (iv) ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸೋಣ. ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ, ನಾವು $A \setminus B$ ನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ A ನಿಂದ B ನ ಎಲ್ಲಾ ಧಾತುಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೊರತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ, $B \setminus A$ ನಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ತಪ್ಪು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. $A = \{2, 5, 8\}$ ಮತ್ತು $B = \{5, 7, -1\}$ ಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $A \setminus B = \{2, 8\}$ ಮತ್ತು $B \setminus A = \{7, -1\}$ ಹಾಗೂ $A \setminus B \neq B \setminus A$. ಆದ್ದರಿಂದ, (iv) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ತಪ್ಪು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.1

ಕೊಟ್ಟಿರುವ $A = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$ ಮತ್ತು $B = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$ ಗಣಗಳಿಗೆ

(i) ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(ii) ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $A \cup B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cup \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

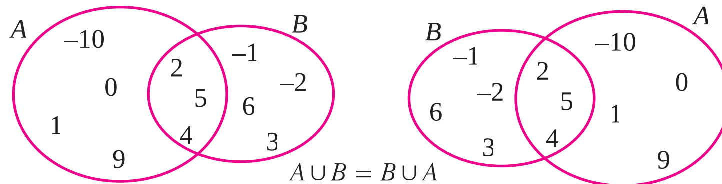
$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (1)

ಹಾಗೂ, $B \cup A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cup \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cup B = B \cup A$ ಎಂದು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.7

ಇದರಿಂದ, ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದೆ.

(ii) ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಈಗ, $A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

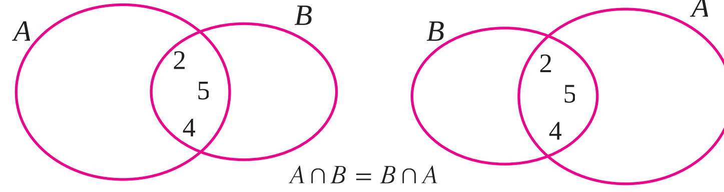
$= \{2, 4, 5\}.$ (1)

ಹಾಗೂ, $B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{2, 4, 5\}.$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳಿಗೆ $A \cap B = B \cap A$.

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.8

ಇದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{5, 6, 7, 8\}$ ಗಣಗಳಿಗೆ,

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

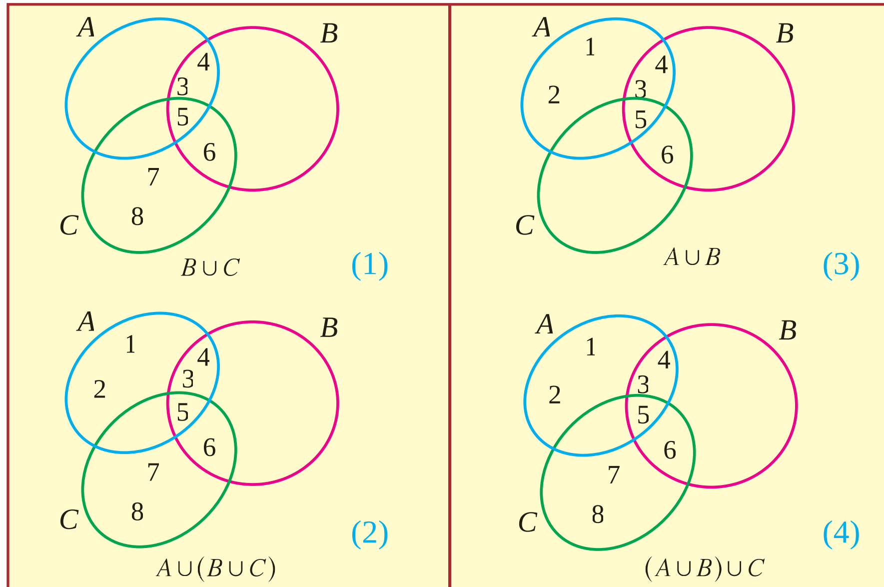
$\therefore \; A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (1)

ಈಗ, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore \; (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,



ಚಿತ್ರ 1.9

ಆದ್ದರಿಂದ, (2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.3

$A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,e\}$ ಮತ್ತು $C = \{a,e\}$ ಆಗಿರಲಿ.

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,e\}$ ಮತ್ತು $C = \{a,e\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ಎಂದು ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು $A \cap (B \cap C)$ ನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈಗ, $B \cap C = \{a,c,e\} \cap \{a,e\} = \{a,e\}$; ಆದ್ದರಿಂದ,

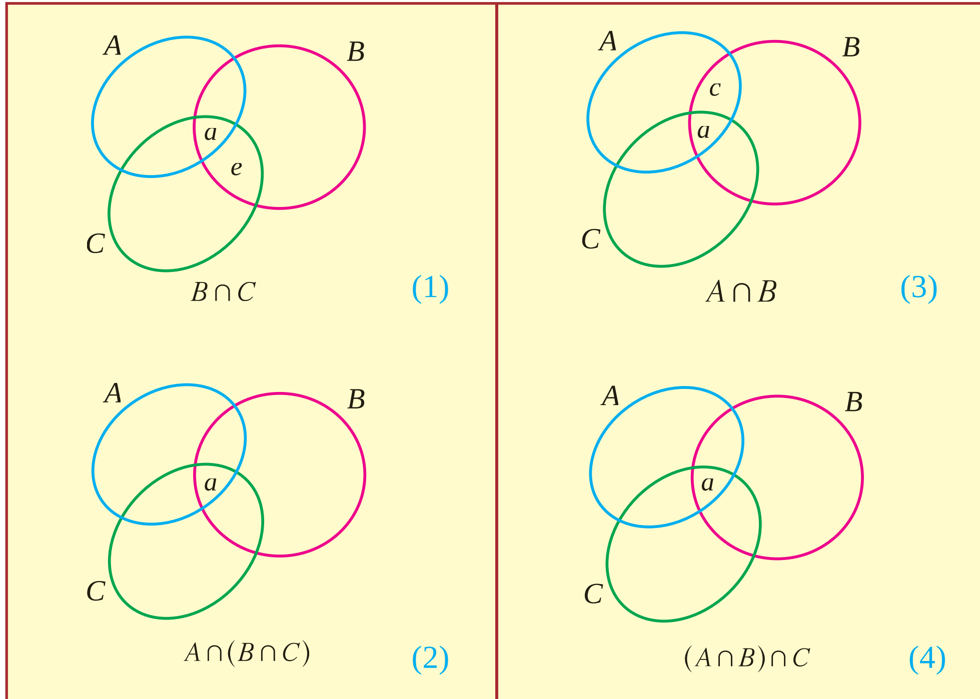
$A \cap (B \cap C) = \{a,b,c,d\} \cap \{a,e\} = \{a\}$. (1)

ನಂತರ, $A \cap B = \{a,b,c,d.\} \cap \{a,c,e\} = \{a,c\}$. ಇದರಿಂದ,

$(A \cap B) \cap C = \{a,c\} \cap \{a,e\} = \{a\}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,



ಚಿತ್ರ 1.10

ಆದ್ದರಿಂದ, (2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.4

$A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{a,e,i,o,u\}$ ಮತ್ತು $C = \{c,d,e,u\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಮೊದಲು ನಾವು $A\setminus(B\setminus C)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ,

$$(B\setminus C)=\{a,e,i,o,u\}\setminus\{c,d,e,u\}=\{a,i,o\}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)=\{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,i,o\}=\{b,c,d,e\}.$ (1)

ನಂತರ, ನಾವು $(A\setminus B)\setminus C$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

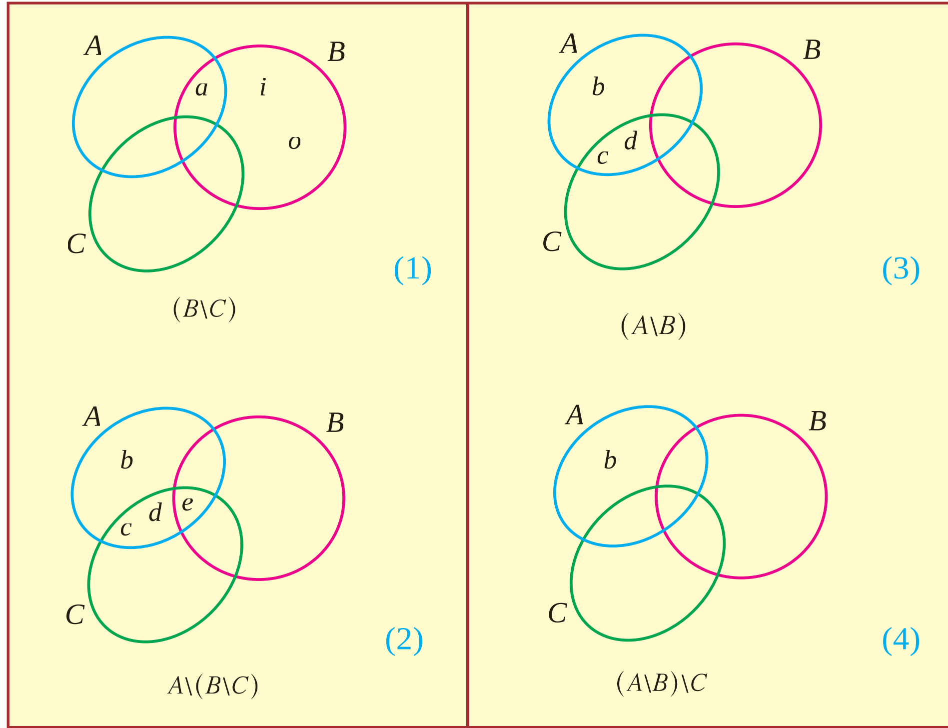
$$A\setminus B=\{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,e,i,o,u\}=\{b,c,d\}.$$

ಇದರಿಂದ, $(A\setminus B)\setminus C=\{b,c,d\}\setminus\{c,d,e,u\}=\{b\}.$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿಲ್ಲ.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,



ಚಿತ್ರ 1.11

(2) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, A, B ಮತ್ತು C ಗಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವುಗಳಾದರೆ, $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$. ಇದು ಸಾಧಿಸಲು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ. B ಮತ್ತು C ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $B\setminus C=B$ ಆಗಿದೆ. A, B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $A\setminus B=A$. ಆದ್ದರಿಂದ, $A\setminus(B\setminus C)=A$ ಆಗಿದೆ. $A\setminus B=A$ ಮತ್ತು A, C ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವು ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದ $A\setminus C=A$. ಇದರಿಂದ, $(A\setminus B)\setminus C=A$. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದಂತೆ $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದ ಗಣಗಳಿಗೆ, ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.5

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, B = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{2, 4, 6, 7\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಮೊದಲು, ನಾವು $A \cup (B \cap C)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$B \cap C = \{1, -2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 7\} = \{4, 6\};$$

$$A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}. \quad (1)$$

ನಂತರ, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, -2, 3, 4, 5, 6\}$

$$= \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

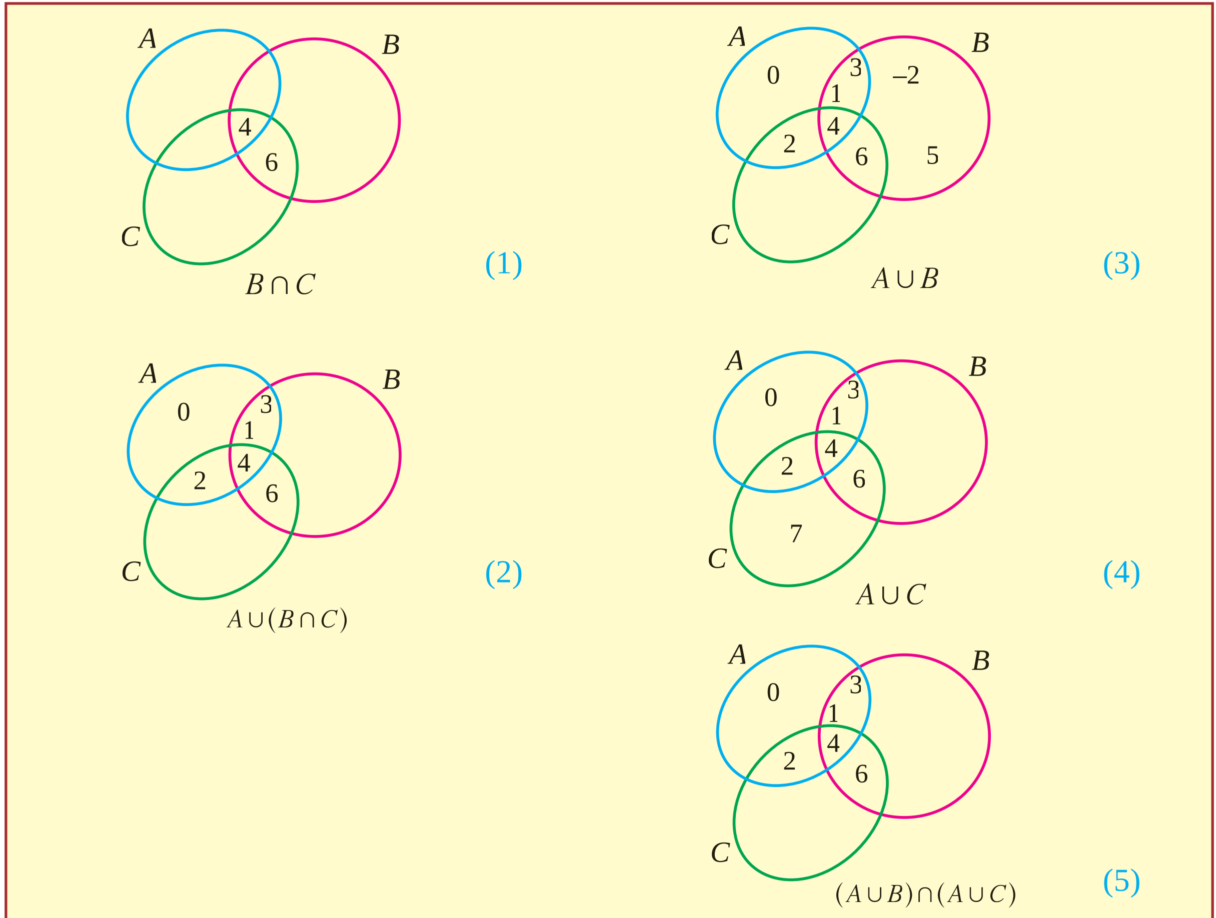
$$A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}.$$

ಆಗ, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}. \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,



ಚಿತ್ರ 1.12

(2) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.6

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}, B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ ಮತ್ತು

$C = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$ ಗಳಿಗೆ, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲು A ಗಣವು -3 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಅಥವಾ ಸಮನಾಗಿರುವ ಮತ್ತು 4 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (ಕೇವಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲ) ಒಳಗೊಂಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆ B ಗಣವು 5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$A = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\}$; ಅಂದರೆ, A ಗಣವು -3 ರಿಂದ 4 ರವರೆಗೆ ಆದರೆ 4 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

–3 4

ಹಾಗೂ, $B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

ಈಗ, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$; ಆದ್ದರಿಂದ,

$A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 4, -5, -3, -1, 0\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (1)

ನಂತರ, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ,

$A \cap B = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3\}$;

ಮತ್ತು $A \cap C = \{x \mid -3 \le x < 4, x \in \mathbb{R}\} \cap \{-5, -3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.

ಇದರಿಂದ, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3,\} \cup \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (2)

ಈಗ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. $A \subset B$ ಆದರೆ, $A \cup B = B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ (ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ).
2. $A \subset B$ ಆದರೆ, $A \cap B$ ಮತ್ತು $A \setminus B$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ).
3. $P = \{a, b, c\}, Q = \{g, h, x, y\}$ ಮತ್ತು $R = \{a, e, f, s\}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $P \setminus R$ (ii) $Q \cap R$ (iii) $R \setminus (P \cap Q)$.
4. $A = \{4, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $A \setminus (C \setminus B)$
5. $A = \{a, x, y, r, s\}, B = \{1, 3, 5, 7, -10\}$ ಆದರೆ, ಗಣ ಸಂಯೋಗದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

6. $A = \{l, m, n, o, 2, 3, 4, 7\}$ ಮತ್ತು $B = \{2, 5, 3, -2, m, n, o, p\}$ ಗಳಿಗೆ ಗಣ ಛೇದನದ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

7. $A = \{x \mid x$ ಎಂಬುದು 42 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ$\}$, $B = \{x \mid 5 < x \leq 12, x \in \mathbb{N}\}$ ಮತ್ತು $C = \{1, 4, 5, 6\}$ ಗಳಿಗೆ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

8. $P = \{a, b, c, d, e\}, Q = \{a, e, i, o, u\}$ ಮತ್ತು $R = \{a, c, e, g\}$ ಆದರೆ, ಗಣ ಛೇದನದ ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

9. $A = \{5, 10, 15, 20\}$; $B = \{6, 10, 12, 18, 24\}$ ಮತ್ತು $C = \{7, 10, 12, 14, 21, 28\}$ ಗಳಿಗೆ $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ ಆಗುವುದೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

10. $A = \{-5, -3, -2, -1\}, B = \{-2, -1, 0\}$ ಮತ್ತು $C = \{-6, -4, -2\}$ ಆಗಿರಲಿ. $A \setminus (B \setminus C)$ ಮತ್ತು $(A \setminus B) \setminus C$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಪರಿಕ್ರಿಯೆ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು?

11. $A = \{-3, -1, 0, 4, 6, 8, 10\}, B = \{-1, -2, 3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು $C = \{-1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ಗಳಿಗೆ (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (iii) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (i) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. (iv) ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ (ii) ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

1.5 ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು (De Morgan's laws)

ಡಿ ಮಾರ್ಗನರ ತಂದೆ (ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಪ್ರಜೆ) ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಈಸ್ಟ್ ಇಂಡಿಯಾ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ಸೇವೆಯಲ್ಲಿದ್ದರು. ಅಗಸ್ತಸ್ ಡಿ ಮಾರ್ಗನ್ (1806-1871) ಭಾರತದ ತಮಿಳುನಾಡು ರಾಜ್ಯದ ಮಧುರೈನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದರು. ಇವರು ಏಳು ತಿಂಗಳ ಮಗುವಾಗಿದ್ದಾಗ ಇವರ ಕುಟುಂಬವರ್ಗವು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿಗೆ ತೆರಳಿತು. ಇವರು ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಕೇಂಬ್ರಿಡ್ಜ್‌ನ ಟ್ರಿನಿಟಿ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಡೆದರು. ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು ಗಣದ ಮೂರು ಆಧಾರ ಪರಿಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಪೂರಕತೆಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸುತ್ತವೆ.

ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು (De Morgan's laws for set difference)

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಗಣಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ,

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

ಪೂರಕತೆಗೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು (De Morgan's laws for complementation)

U ಎಂಬುದು A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

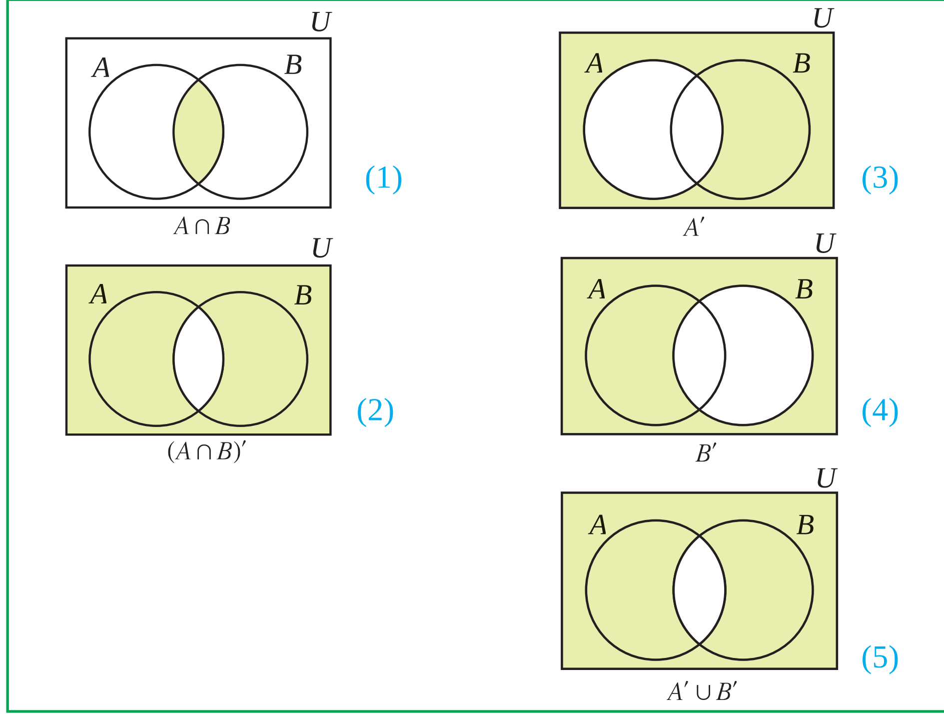
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ನಿಯಮಗಳ ಸಾಧನೆಯಿಂದ ಪೂರಕತೆಯ ನಿಯಮಗಳ ಸಾಧನೆಯು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಗಣ D ಗೆ, $D' = U \setminus D$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.7

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ



(2) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ಎಂಬುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

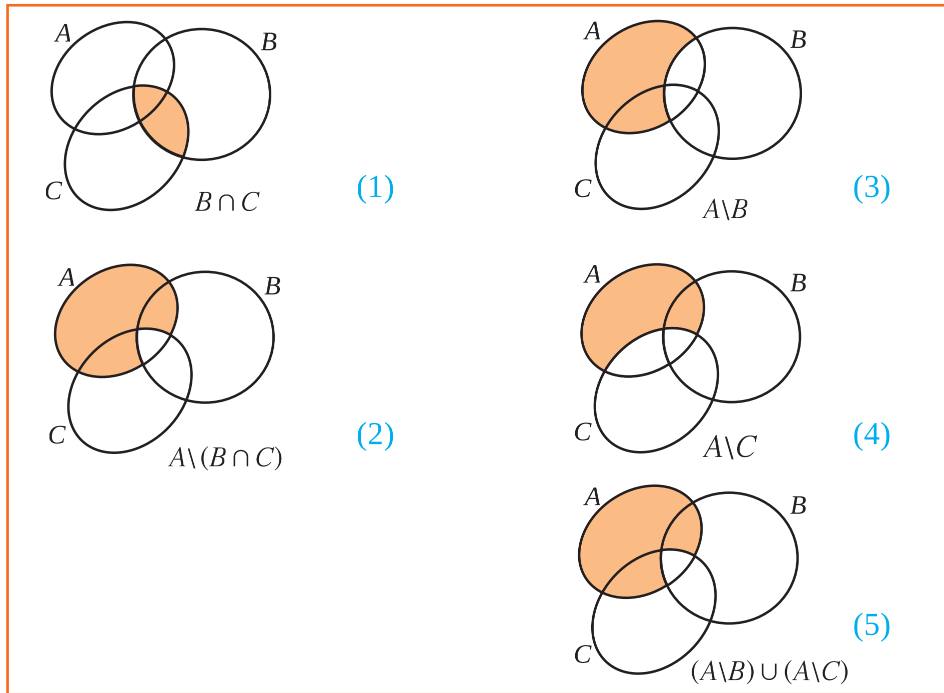
ಚಿತ್ರ 1.13

ಉದಾಹರಣೆ 1.8

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

ಪರಿಹಾರ



ಚಿತ್ರ 1.14

(2) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.9

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$ ಮತ್ತು $B = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಪೂರಕತೆಯ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲು ನಾವು $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ,

$$A \cup B = \{-2, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 8, 9\} = \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\};$$

ಇದರಿಂದ,

$$(A \cup B)' = U \setminus \{-2, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \qquad (1)$$

ನಂತರ,

$$A' = U \setminus A = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B' = U \setminus B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$A' \cap B' = \{-1, 0, 1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$= \{-1, 0, 6, 7, 10\}. \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಗೆ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.10

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, c, d, e\}$ ಮತ್ತು $C = \{d, e, f, g, 2, y\}$ ಆಗಿರಲಿ. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲು,

$$B \cup C = \{1, 2, c, d, e\} \cup \{d, e, f, g, 2, y\}$$

$$= \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}.$$

ಆಗ

$$A \setminus (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, x, y, z\} \setminus \{1, 2, c, d, e, f, g, y\}$$

$$= \{a, b, x, z\}. \qquad (1)$$

ನಂತರ, $A \setminus B = \{a, b, f, g, x, y, z\}$ ಮತ್ತು $A \setminus C = \{a, b, c, x, z\}$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{a, b, x, z\}. \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ಆಗಿದೆ.

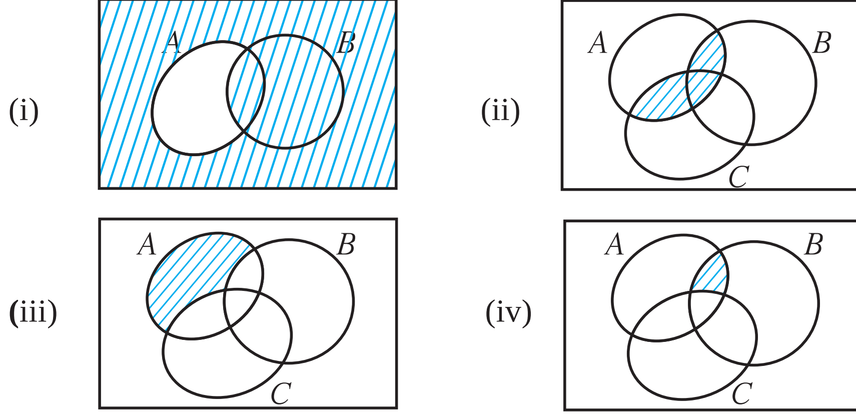
ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

   (i) $U = \{5, 6, 7, 8, ...13\}$, $A = \{5, 8, 10, 11\}$ ಮತ್ತು $B = \{5, 6, 7, 9, 10\}$

   (ii) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $M = \{b, d, f, g\}$ ಮತ್ತು $N = \{a, b, d, e, g\}$

2. ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅಗತ್ಯವೆಂಬಂತೆ $U, A, B, C, \cup, \cap, '$ ಮತ್ತು $\setminus$ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.



3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುವ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $A \cap B \cap C$ (ii) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವು ಆದರೆ ಅವೆರಡೂ C ನ ಉಪಗಣಗಳು

(iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$

4. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$ ಮತ್ತು $B = \{4, 16, 20, 28\}$ ಆದರೆ, $(A \cup B)'$ ಮತ್ತು $(A \cap B)'$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, f, g\}$ ಮತ್ತು $B = \{a, b, c\}$ ಆದರೆ, ಪೂರಕತೆಯ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

7. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$ ಮತ್ತು $C = \{3, 9, 10, 12, 13\}$

8. $A = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, $B = \{1, 5, 10, 15, 20, 30\}$ ಮತ್ತು $C = \{7, 8, 15, 20, 35, 45, 48\}$ ಆದರೆ, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

9. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (vi) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

1.6 ಗಣಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆ (Cardinality of sets)

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. A, B ಮತ್ತು $A\cap B$ ಗಣಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆಯು ಗೊತ್ತಿರುವಾಗ $A\cup B$ ಗಣದ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸೂತ್ರವು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಗಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ ಮತ್ತು $A\cup B\cup C$ ನ ಪ್ರಧಾನತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಸೂತ್ರವೇನು? ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರವು

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ ಆಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಬಳಕೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.11

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ, 65 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಲ್ಚೆಂಡು, 45 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಕಿ, 42 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕ್ರಿಕೆಟ್, 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಹಾಕಿ, 25 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಕ್ರಿಕೆಟ್, 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಕಿ ಮತ್ತು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಹಾಗೂ 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮೂರೂ ಆಟಗಳನ್ನು ಆಡುತ್ತಾರೆ. ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಆಟವನ್ನಾದರೂ ಆಡುತ್ತಾನೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.)

ಪರಿಹಾರ F, H ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಾಲ್ಚೆಂಡು, ಹಾಕಿ ಮತ್ತು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಆಗ, $n(F)=65, n(H)=45$ ಮತ್ತು $n(C)=42$.

ಹಾಗೂ, $n(F\cap H)=20$, $n(F\cap C)=25$, $n(H\cap C)=15$ ಮತ್ತು $n(F\cap H\cap C)=8$.

ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ. ಅಂದರೆ, $n(F\cup H\cup C)$.

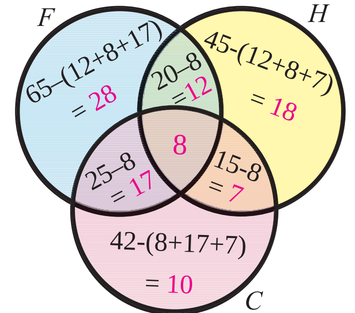
ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$$n(F\cup H\cup C)=n(F)+n(H)+n(C)-n(F\cap H)$$
$$-n(H\cap C)-n(F\cap C)+n(F\cap H\cap C)$$
$$=65+45+42-20-25-15+8=100.$$

ಇದರಿಂದ, ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 100 ಆಗಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಕೂಡ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು. ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ತರ್ಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು. ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯು ಮೂರು ಛೇದಿಸುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಂದು ಆಟವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನೋಡಿ ಮತ್ತು ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಆಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 1.15

ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

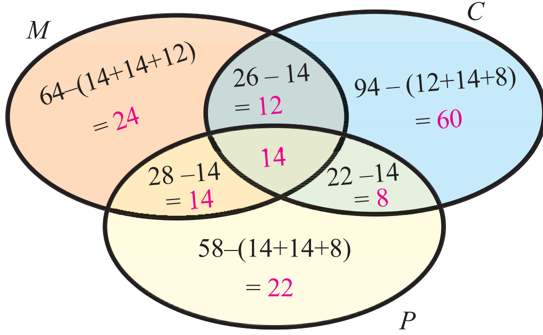
$$= 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.$$

ಉದಾಹರಣೆ 1.12

ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ಸಮೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ, 64 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ, 94 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ, 58 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 28 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 26 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ, 22 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಹಾಗೂ 14 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವುದಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ. ಸಮೀಕ್ಷೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

M, C, P ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.16

$n(M \cap C \cap P') = 26 - 14 = 12$

$n(M \cap P \cap C') = 28 - 14 = 14$

$n(C \cap P \cap M') = 22 - 14 = 8$

ಸಮೀಕ್ಷೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$= 24 + 12 + 60 + 8 + 22 + 14 + 14 = 154$

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 64-(14+14+12) = 24$

ಗಣಕ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 94 - (12+14+8) = 60$

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 58 - (14+14+8) = 22$

ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 24+60+22 = 106$

ಉದಾಹರಣೆ 1.13

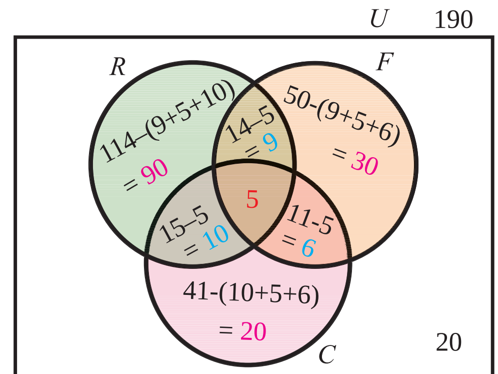
ಒಂದು ಆಕಾಶವಾಣಿ ಕೇಂದ್ರವು 190 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಅವರು ಇಚ್ಛಿಸುವ ಸಂಗೀತದ ವಿಧಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಸಮೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿತು. ಈ ಸಮೀಕ್ಷೆಯಿಂದ, 114 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 41 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 14 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಮತ್ತು ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಮತ್ತು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು, 11 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಮತ್ತು ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಹಾಗೂ 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿತು. ಹಾಗಾದರೆ, (i) ಮೂರು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನೂ ಇಚ್ಛೆಪಡದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (ii) ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ವಿಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಚ್ಛಿಸುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? (iii) ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ಆದರೆ ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ R, F ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ, ಜಾನಪದ ಮತ್ತು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಗಳನ್ನು ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$n(R \cap F \cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R \cap C \cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F \cap C \cap R') = 11 - 5 = 6.$



ಚಿತ್ರ 1.17

ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯಿಂದ, ಸಂಗೀತದ ಮೂರು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170$.

ಸಮೀಕ್ಷೆಗೊಳಪಡಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 190$.

ಮೂರರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಧವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 190 - 170 = 20$.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಧಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಚ್ಛಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 9 + 6 + 10 = 25$.

ಜಾನಪದ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡುವ ಆದರೆ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಸಂಗೀತವನ್ನು ಇಚ್ಛೆಪಡದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 30 + 6 = 36$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳು ಮತ್ತು U ಎಂಬುದು $n(U) = 700$ ಆಗುವಂತೆ ವಿಶ್ವಗಣ, $n(A) = 200, n(B) = 300$ ಮತ್ತು $n(A \cap B) = 100$ ಆದರೆ, $n(A' \cap B')$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $n(A) = 285, n(B) = 195, n(U) = 500, n(A \cup B) = 410$ ಆದರೆ, $n(A' \cup B')$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಯಾವುದೇ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ $n(A) = 17, n(B) = 17, n(C) = 17, n(A \cap B) = 7$ $n(B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 5$ ಮತ್ತು $n(A \cap B \cap C) = 2$ ಆದರೆ, $n(A \cup B \cup C)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಗೆ $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.
   (i) $A = \{4, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$ ಮತ್ತು $C = \{6, 7, 8, 9\}$
   (ii) $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{x, y, z\}$ ಮತ್ತು $C = \{a, e, x\}$
5. ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ, 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ, 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಾತಿ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಯಾರೊಬ್ಬರೂ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಾತಿ ಪಡೆದಿಲ್ಲ. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ವಿಷಯದಲ್ಲಾದರೂ ಪ್ರವೇಶಾತಿ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ, 85% ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್, 40% ಜನರು ತಮಿಳು, 20% ಜನರು ಹಿಂದಿ, 42% ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಮತ್ತು ತಮಿಳು, 23% ಜನರು ತಮಿಳು ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ, 10% ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತನಾಡಿದರೆ, ಮೂರೂ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಮಾತನಾಡುವ ಶೇಕಡಾವಾರು ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಜಾಹಿರಾತು ಸಂಸ್ಥೆಯು ತನ್ನ 170 ಕಕ್ಷಿದಾರರಲ್ಲಿ, 115 ಜನ ದೂರದರ್ಶನ, 110 ಜನ ರೇಡಿಯೋ, 130 ಜನ ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆ, 85 ಜನ ದೂರದರ್ಶನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆ, 75 ಜನ ದೂರದರ್ಶನ ಮತ್ತು ರೇಡಿಯೋ, 95 ಜನ ರೇಡಿಯೋ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆ, 70 ಜನ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ವಿಧಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡಿತು. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವೆನ್ನನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ರೇಡಿಯೋವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸುವ ಜನರೆಷ್ಟು? (ii) ದೂರದರ್ಶನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸುವ ಜನರೆಷ್ಟು?
   (iii) ದೂರದರ್ಶನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಆದರೆ ರೇಡಿಯೋವನ್ನು ಬಳಸದ ಜನರೆಷ್ಟು?
8. 4000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ, 2000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ, 3000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಮಿಳು, 500 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹಿಂದಿ, 1500 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಮತ್ತು ತಮಿಳು, 300 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ, 200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಮಿಳು ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ ಹಾಗೂ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಭಾಷೆಗಳು ತಿಳಿದಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ, (i) ಮೂರೂ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಭಾಷೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು? (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಭಾಷೆಯನ್ನಾದರೂ ತಿಳಿದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು? (iii) ಎರಡು ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಷ್ಟು?

9. 120 ಕುಟುಂಬಗಳಿರುವ ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಯಲ್ಲಿ, ಅಡಿಗೆಗಾಗಿ 93 ಕುಟುಂಬಗಳು ಕಟ್ಟಿಗೆ(ಸೌದೆ), 63 ಕುಟುಂಬಗಳು ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ, 45 ಕುಟುಂಬಗಳು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲ, 45 ಕುಟುಂಬಗಳು ಕಟ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತು ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ, 24 ಕುಟುಂಬಗಳು ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ ಮತ್ತು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲ, 27 ಕುಟುಂಬಗಳು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಕಟ್ಟಿಗೆ, ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ ಮತ್ತು ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಕುಟುಂಬಗಳು ಬಳಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.7 ಸಂಬಂಧಗಳು (Relations)

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಗಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳಿಂದ ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಪೂರಕತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಹೊಸ ಗಣವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಗಣವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವ ಪರ್ಯಾಯ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ. ಈ ಹೊಸ ಗಣವು ಗಣಿತದ "ಸಂಬಂಧ, ಉತ್ಪನ್ನ" ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿದೆ.

ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ $A\times B$ ನ್ನು (ಇದನ್ನು 'A ಛೇದಕ B' ಎಂದು ಓದುವುದು) ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು. $A\times B$ ನ್ನು B ನೊಂದಿಗೆ A ನ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$A\times B = \{(a,b)\,|\,a\in A$ ಮತ್ತು $b\in B\}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, B ಛೇದಕ A ಗಣವನ್ನು

$B\times A = \{(b,a)\,|\,b\in B$ ಮತ್ತು $a\in A\}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) $(a,\ b)$ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವು ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಅಂದರೆ, $a\neq b$ ಆದರೆ, $(a,\ b)\neq(b,\ a)$.

(ii) ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ $A\times B$ ನಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಸೆಲ್ ಫೋನ್ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಸೆಲ್ ಫೋನ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾರಲಾಯಿತು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ C_1, C_2, C_3 ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. C_1 ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 1200, C_2 ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 2500 ಮತ್ತು C_3 ನ ಬೆಲೆಯು ₹ 2500 ಆಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

$A = \{\ C_1, C_2, C_3\ \}$ ಮತ್ತು $B = \{\ 1200, 2500\ \}$ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $A\times B=\{(C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3,2500)\}$

ಆದರೆ $B\times A= \{(1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,),(1200, C_3), (2500, C_3)\}$ ಆಗಿದೆ.

$A\neq B$ ಆದರೆ, $A\times B\neq B\times A$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$A\times B$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ $F = \{(C_1,\ 1200),\ (C_2,\ 2500),\ (C_3,\ 2500)\}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಅಣಿತಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೊದಲ ಅಂಶವು ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವು ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಿಲ್ಲ.

F ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶದಲ್ಲಿ, ಮೂಲಭೂತವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಅಂಶವು ಮೊದಲನೇ ಅಂಶದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ನಂತರ, $B\times A$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ $E=\{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, ಮೊದಲಿನ ಅಂಶ 2500 ಎಂಬುದು C_2 ಮತ್ತು C_3 ಭಿನ್ನ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ನಿಂದ B ಗಿರುವ R ಸಂಬಂಧವು $A\times B$ ನ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $R\subseteq A\times B$.

R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{x\in A \mid (x,y)\in R$ ಕೆಲವು $y\in B$ ಗೆ.$\}$

R ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{y\in B \mid (x,y)\in R$ ಕೆಲವು $x\in A$ ಗೆ.$\}$

1.8 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು (Functions)



ಪೀಟರ್ ಡಿರಿಚ್ಲೆಟ್ (1805-1859)

ಜರ್ಮನಿಯ ಡಿರಿಚ್ಲೆಟ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಯಂತ್ರ ವಿಜ್ಞಾನ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

1837 ರಲ್ಲಿ ಇವರು $y=f(x)$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದೊಂದಿಗೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಆಧುನಿಕ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಇವರು ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಪಿಜನ್‌ಹೋಲ್ ತತ್ವವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದರು.

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವು ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತಹ ಸಂಬಂಧ $f\subseteq A\times B$ ಆಗಿದೆ.

(i) f ನ ಕ್ಷೇತ್ರವು A ಆಗಿದೆ.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x\in A$ ಗೆ, $(x, y)\in f$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು $y\in B$ ಇರುತ್ತದೆ.

A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವು (i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ಸಂಬಂಧದ ವಿಶೇಷ ವಿಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬಿಂಬನ ಅಥವಾ ವರ್ಗಾವಣೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f: A\to B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $(x,y)\in f$ ಆದರೆ, $y=f(x)$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಬಂಧದ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೇ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪುನರ್‌ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಬಹಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಕಾರ್ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ನಿಂದ B ಗಿರುವ f ಉತ್ಪನ್ನವು ಸಂಬಂಧದ ನಿಯಮವಾಗಿದ್ದು, ಅದು ಪ್ರತಿ $x\in A$ ಅಂಶವನ್ನು ಅನನ್ಯ $y\in B$ ಗೆ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. y ಎಂಬುದು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು $y=f(x)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

A ಗಣವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು B ಗಣವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ, f ನಲ್ಲಿ y ನ್ನು x ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಮತ್ತು x ನ್ನು y ನ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. f ನಲ್ಲಿ A ನ ಅಂಶಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಇದರ ಸಹಕ್ಷೇತ್ರದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

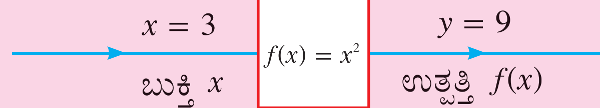
ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಆಧುನಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸುಮಾರು 1837 ರಲ್ಲಿ ನಿಕೊಲೈ ಲಬಚೊವೆಸ್ಕಿ ಮತ್ತು ಪೀಟರ್ ಡಿರಿಚ್ಲೆಟ್ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೀಡಿದರು. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಇರಲಿಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮೊದಲು ವಿಭಾಗ 1.7 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ ಗಣವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $F \subseteq A \times B$ ಯು ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ (i) ಮತ್ತು (ii) ರ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ ಗಣವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ ಎಂಬವು (ii) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) f ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬುಕ್ಕಿ ಬೆಲೆ x ಗೆ ಅನನ್ಯ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಬೆಲೆ y ನ್ನು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಯಂತ್ರವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.



(ii) ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ನಮಗೆ ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರದ ಅನನ್ಯ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಲು ಒಂದು ನಿಯಮದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ಮತ್ತು $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ ಆಗಿರಲಿ.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗಿರಲಿ. R ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ, ಸಹಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ R ನ ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{1, 2, 3, 4\} = A$.

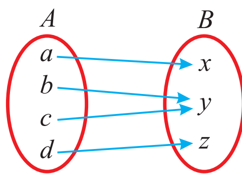
ಹಾಗೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೆ $y = R(x)$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದೇ ಒಂದು $y \in B$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ R ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವು B ಆಗಿದೆ. $R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$ ಮತ್ತು $R(4) = 9$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, R ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು $\{3, 6, 10, 9\}$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1.15

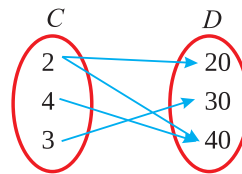
ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆಯೇ? ವಿವರಿಸಿ.

(i)



ಚಿತ್ರ 1.18

(ii)



ಚಿತ್ರ 1.19

ಪರಿಹಾರ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (i) ರಲ್ಲಿ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು ಅನನ್ಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ರಲ್ಲಿ, C ನಲ್ಲಿರುವ 2 ಎಂಬ ಅಂಶವು 20 ಮತ್ತು 40 ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.16

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಬಂಧವು X ನಿಂದ X ಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

(i) $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$

(ii) $g = \{(3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ (iii) $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3)\}$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

f ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 2 ಎಂಬುದು 3 ಮತ್ತು 1 ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(ii) ಸಂಬಂಧ $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1)\}$ ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 1 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಯಾವುದೇ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, g ನ ಕ್ಷೇತ್ರ $=\{2, 3, 4\} \neq X$

(iii) ನಂತರ, $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

X ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು X ನ ಅನನ್ಯ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, h ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.17

$A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$ ರಿಂದ $B = \{ -1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$ ಗೆ ಇರುವ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿವೆ? ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

ಪರಿಹಾರ (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$.

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, f_1 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.
f_1 ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $\{-1, 2, -3, -4\}$ ಆಗಿದೆ.

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$.

f_2 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, 1 ಎಂಬುದು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಅಂಶಗಳಾದ -4 ಮತ್ತು -1 ರೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ, 4 ಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, f_3 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

f_3 ರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{ 2 \}$.

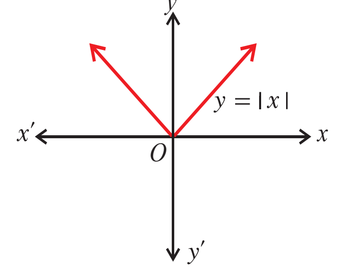
(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$.

A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಏಕೈಕ ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, f_4 ಎಂಬುದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.
f_4 ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{ 2, 5, -4\}$.

ಉದಾಹರಣೆ 1.18

$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 & \text{ಆದಾಗ} \\ -x, x < 0 & \text{ಆದಾಗ} \end{cases}$, ಇಲ್ಲಿ $x \in \mathbb{R}$. ಆಗಿರಲಿ. $\{ (x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R} \}$ ಸಂಬಂಧವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆಯೇ? ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೆ, ಏಕೈಕ $y = |x|$ ಬೆಲೆಯು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಕ್ಷೇತ್ರವು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $\mathbb{R}$ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗೆ, $|x|$ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ) ಗಣವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.20

ಗಮನಿಸಿ

$y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 & \text{ಆದಾಗ} \\ -x, x < 0 & \text{ಆದಾಗ} \end{cases}$, ಇಲ್ಲಿ $x \in \mathbb{R}$, ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು **ನಿಯತಗುಣಕ** ಅಥವಾ **ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ** ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $|-8| = -(-8) = 8$ ಮತ್ತು $|8| = 8$.

1.8.1 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ (Representation of functions)

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

(i) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ, (ii) ಕೋಷ್ಟಕ, (iii) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ, (iv) ನಕ್ಷೆ

$f : A \rightarrow B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ.

(i) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ ಎಲ್ಲಾ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) f ನಲ್ಲಿರುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಡಬಹುದು.

(iii) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರವು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನಿಂದ f ನ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(iv) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು x-y ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವು f ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸೋಣ.

ಹಲವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಪರೀಕ್ಷೆಯು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

1.8.2 ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖಾ ಪರೀಕ್ಷೆ (Vertical line test)

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

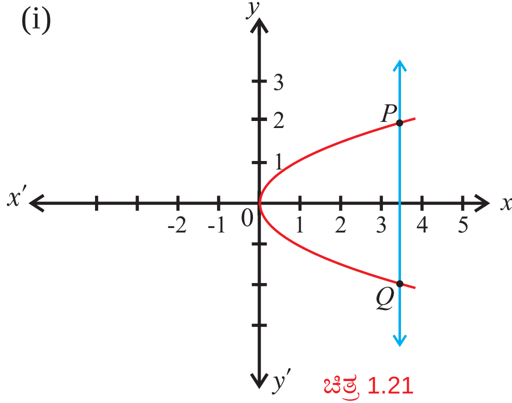
ಸೂಚನೆ

ಕೆಲವು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಗಳು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸದಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸಿದರೆ ಆ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, x ನ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಗೆ ಕನಿಷ್ಠ y ನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y^2 = x$ ನ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.19

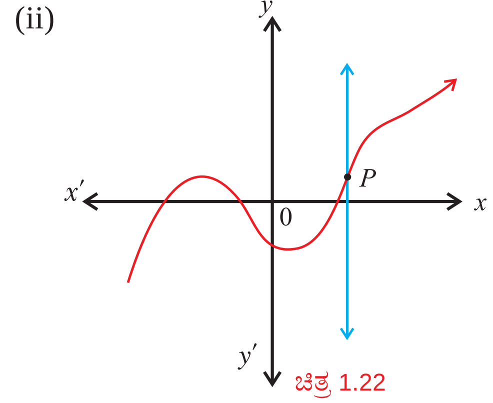
ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ನಕ್ಷೆಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

(i)



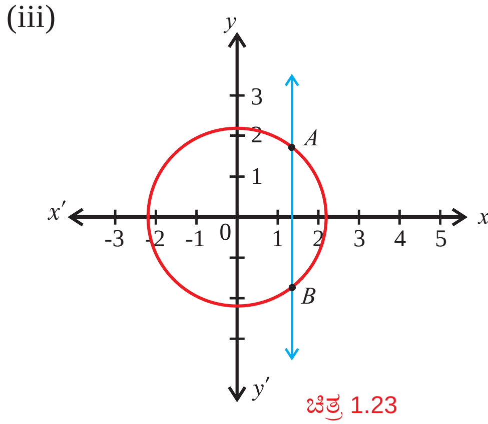
ಚಿತ್ರ 1.21

(ii)



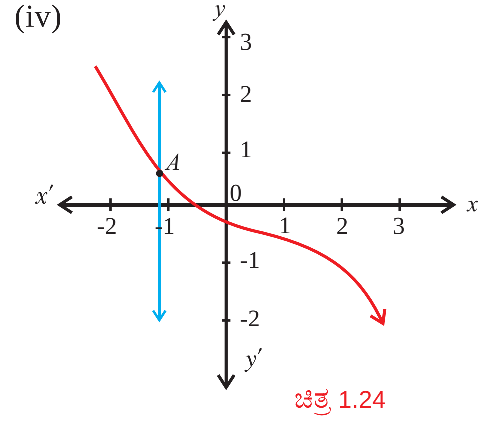
ಚಿತ್ರ 1.22

(iii)



ಚಿತ್ರ 1.23

(iv)



ಚಿತ್ರ 1.24

ಪರಿಹಾರ

(i) ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಯಾವುದೇ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(iv) ನಕ್ಷೆಯು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.20

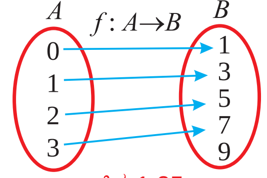
$A = \{0, 1, 2, 3\}$ ಮತ್ತು $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. $f : A \to B$ ಎಂಬುದು $f(x) = 2x + 1$ ಆಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ಕೋಷ್ಟಕ (iii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು (iv) ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$, $f(1) = 2(1)+1 = 3$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ

f ನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 1.25

A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನಾವು ಎರಡು ಆವೃತ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಂತರ, A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಇದರ ಏಕೈಕ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪ

f ನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ

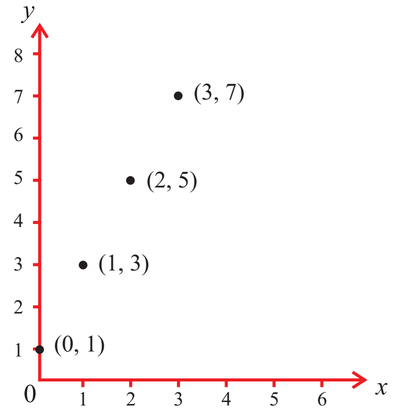
ಕೊಟ್ಟಿರುವ f ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣದಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

(iv) ನಕ್ಷೆ

$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)\}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $(0, 1), (1, 3), (2, 5)$ ಮತ್ತು $(3, 7)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಒಗ್ಗೂಡುವಿಕೆಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

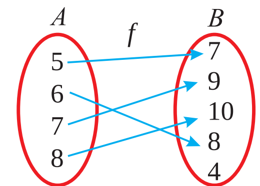


ಚಿತ್ರ 1.26

1.8.3 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವಿಧಗಳು (Types of functions)

ಉತ್ಪನ್ನದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವಿಧಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು.

(i) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (One-One function)

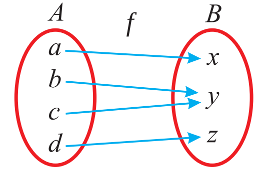


ಚಿತ್ರ 1.27

$f : A \rightarrow B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. f ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು **ಒಂದು–ಒಂದು** ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ A ನ ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು B ನಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, A ನಲ್ಲಿ $u \neq v$ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ $f(u) \neq f(v)$ ಎಂಬಂತಾದರೆ, f ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, B ನಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿನ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶದೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, f ನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಅಂತಃಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

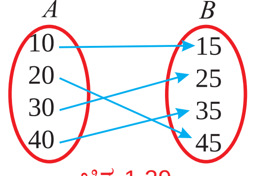
(ii) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (Onto function)



ಚಿತ್ರ 1.28

$f : A \to B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ B ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $b \in B$ ಗೆ, $f(a) = b$ ಆಗುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಂಶ $a \in A$ ಇದ್ದರೆ, f ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು B ಯು f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, f ಎಂಬುದು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

(iii) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (One-One and onto function)



ಚಿತ್ರ 1.29

$f : A \to B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ ಅಥವಾ ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ, f ಎಂಬುದು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣಗಳೆರಡೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, A ನ ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು B ನಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳಿಗೆ ಬಿಂಬನವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಅಂಶದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿರಬೇಕು.

ಸೂಚನೆ

(i) $f : A \to B$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೇಲಣವಾದರೆ, $B = f$ ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

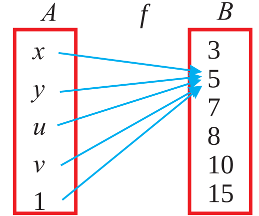
(ii) $f : A \to B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಆದರೆ, $f(a_1) = f(a_2)$ ಎಂಬುದು A ನಲ್ಲಿ $a_1 = a_2$ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು A ನಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

(iii) $f : A \to B$ ಎಂಬುದು ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ, A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಿಮಿತ ಗಣಗಳಾದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಳ ಪ್ರಧಾನತೆಯು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 1.29 ರಲ್ಲಿ f ಎಂಬುದು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣವಾಗಿದೆ.

(iv) $f : A \to B$ ಎಂಬುದು ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, ಆಗ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಸಮಾನ ಗಣಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(v) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಅನುರೂಪತೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (Constant function)



ಚಿತ್ರ 1.30

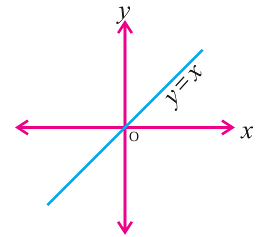
A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನಲ್ಲಿನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $f : A \to B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಏಕಾಂಶ ಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$A = \{ x, y, u, v, 1 \}$, $B = \{ 3, 5, 7, 8, 10, 15 \}$ ಆಗಿರಲಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ಗೆ, $f : A \to B$ ಯು $f(x) = 5$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(v) ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ (Identity function)



ಚಿತ್ರ 1.31

A ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಎಲ್ಲಾ $a \in A$ ಗಳಿಗೆ $f(a) = a$ ಆದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನ $f : A \to A$ ನ್ನು A ನ ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವು A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಅದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಬಿಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \mathbb{R}$ ಆಗಿರಲಿ. ಎಲ್ಲಾ $x \in \mathbb{R}$ ಗೆ $f(x) = x$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವು $\mathbb{R}$ ನ ಮೇಲೆ ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರ 1.31 ಎಂಬುದು $\mathbb{R}$ ಮೇಲಿನ ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.21

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \mathbb{N}$ ಮತ್ತು $f : A \to B$ ಉತ್ಪನ್ನವು $f(x) = x^2$ ಆಗಿರಲಿ. f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿಧವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $B = \{ 1, 2, 3, 4, \cdots \}$

$f : A \to B$ ಮತ್ತು $f(x) = x^2$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = 4$; $f(3) = 9$; $f(4) = 16$; $f(5) = 25$.

f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{ 1, 4, 9, 16, 25\}$

ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು ಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳಿಗೆ ಬಿಂಬಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, $3 \in B$ ಆಗಿದ್ದು $f(x) = x^2 = 3$ ಆಗುವಂತೆ $x \in A$ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೇಲಣವಾಗಿಲ್ಲ.

ಗಮನಿಸಿ

$g(x) = x^2$ ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $u = 1$ ಮತ್ತು $v = -1$ ಆದಾಗ $u \neq v$. ಆದರೆ $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರವು ಮಾತ್ರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು–ಒಂದು ಅಥವಾ ಮೇಲಣವಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ನಾವು ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ ನಿಯಮ, ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1.22

ಉತ್ಪನ್ನ $f : [1, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & 1 \le x < 2 \\ 2x - 1 & 2 \le x < 4 \\ 3x^2 - 10 & 4 \le x < 6 \end{cases} \qquad (\text{ಇಲ್ಲಿ, } [1, 6) = \{ x \in \mathbb{R} : 1 \le x < 6 \})$$

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$ (iv) $f(2) - f(4)$ (v) $2 f(5) - 3 f(1)$

ಪರಿಹಾರ

(i) ನಾವು $f(5)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. 5 ಎಂಬುದು 4 ಮತ್ತು 6 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದರಿಂದ, $f(x) = 3x^2 - 10$ ನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(5) = 3(5^2) - 10 = 65$.

(ii) $f(3)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, 3 ಎಂಬುದು 2 ಮತ್ತು 4 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(3)$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $f(x) = 2x - 1$ ನ್ನು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆಗ, $f(3) = 2(3) - 1 = 5$.

(iii) $f(1)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ, 1 ಎಂಬುದು $1 \le x < 2$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ.

ಆಗ, $f(x) = 1 + x$ ನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, $f(1) = 1 + 1 = 2$.

(iv) $f(2) - f(4)$

ಈಗ, 2 ಎಂಬುದು $2 \le x < 4$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ಆಗ, $f(x) = 2x - 1$ ನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(2) = 2(2) - 1 = 3$.

ಹಾಗೂ, 4 ಎಂಬುದು $4 \le x < 6$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ. ಆಗ, $f(x) = 3x^2 - 10$ ನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಬೇಕು.

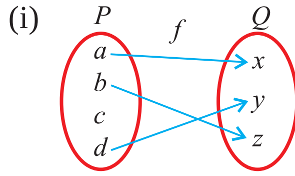
ಆದ್ದರಿಂದ, $f(4) = 3(4)^2 - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$.

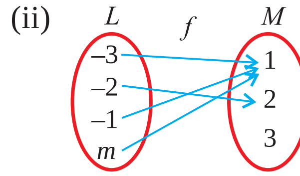
ಇದರಿಂದ, $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35$.

(v) $2f(5) - 3f(1)$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು, (i) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಆಗ, $2f(5) - 3f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

(i)


(ii)


2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ $F = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ ಮತ್ತು $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3$. ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ (ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿ).

(i) $f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$

(ii) $f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$

(iii) $f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$

4. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನ A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಯಾವ ಸಂಬಂಧಗಳು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ. ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, ಇದರ ವಿಧವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2, x \in X, y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ ಎಂಬುದು ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, a, b, c ಮತ್ತು d ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ ಮತ್ತು $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ ಆದರೆ, f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. f ಎಂಬುದು A ನಿಂದ A ಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ?

7. $f = \{(2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3)\}$ ಎಂಬುದು A ನಿಂದ B ಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. $A = \{-1, 0, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ ಆದರೆ, ಇದು (i) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (ii) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆರಡೂ ಆಗಿದೆಯೇ?

8. $f = \{(12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17)\}$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

9. $f(x) = 2x - 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ $A = \{5, 6, 8, 10\}$ ರಿಂದ $B = \{19, 15, 9, 11\}$ ಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. a ಮತ್ತು b ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

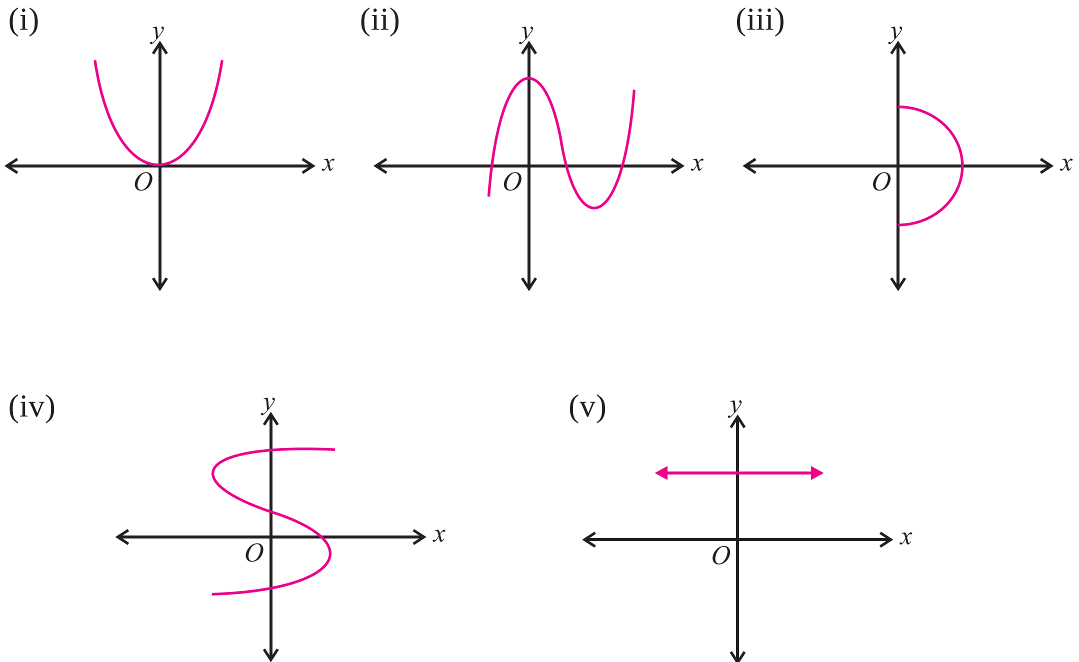
x	5	6	8	10
$f(x)$	a	11	b	19

10. $A = \{5, 6, 7, 8\}$; $B = \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$ ಮತ್ತು
$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x, x \in A, y \in B\}$ ಆಗಿರಲಿ.

(i) f ನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (ii) ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವೇನು?

(iii) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯೇನು ? (iv) ಉತ್ಪನ್ನದ ವಿಧವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

11. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳಿಗೆ ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿ.



12. $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು

(i) ಕೋಷ್ಟಕದ (ii) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ ಮತ್ತು $f : A \to B$ ಯು $f(x) = \frac{x-3}{3}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರಲಿ. f ನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

(i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ

(iii) ಕೋಷ್ಟಕ (iv) ನಕ್ಷೆ

14. $A = \{4, 6, 8, 10 \}$ ಮತ್ತು $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$ ಆಗಿರಲಿ. $f : A \to B$ ಯು $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, f ನ್ನು

(i) ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ (ii) ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ (iii) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

15. $f : [-3, 7) \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x \le 6 \end{cases}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\frac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$

16. $f : [-7, 6) \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1; & -7 \le x < -5 \\ x + 5; & -5 \le x \le 2 \\ x - 1; & 2 < x < 6 . \end{cases}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದೆ.

(i) $2\,f(-4) + 3\,f(2)$ (ii) $f(-7) - f(-3)$ (iii) $\frac{4\,f(-3) + 2\,f(4)}{f(-6) - 3\,f(1)}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ, $A \cup B = A$ ಆದರೆ,

(A) $B \subseteq A$ (B) $A \subseteq B$ (C) $A \neq B$ (D) $A \cap B = \phi$

2. $A \subset B$ ಆದರೆ, $A \cap B$ ಯು

(A) B (B) $A \backslash B$ (C) A (D) $B \backslash A$

3. ಯಾವುದೇ P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ, $P \cap Q$ ಯು

(A) $\{x : x \in P$ ಅಥವಾ $x \in Q\}$ (B) $\{x : x \in P$ ಮತ್ತು $x \notin Q\}$

(C) $\{x : x \in P$ ಮತ್ತು $x \in Q\}$ (D) $\{x : x \notin P$ ಮತ್ತು $x \in Q\}$

4. $A = \{ p, q, r, s \}$, $B = \{ r, s, t, u \}$ ಆದರೆ, $A \setminus B$ ಯು

(A) $\{ p, q \}$ (B) $\{ t, u \}$ (C) $\{ r, s \}$ (D) $\{p, q, r, s \}$

5. $n[p(A)] = 64$ ಆದರೆ, $n(A)$ ಯು

(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. ಯಾವುದೇ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ, $A \cap (B \cup C)$ ಯು

(A) $(A \cup B) \cup (B \cap C)$ (B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C) $A \cup (B \cap C)$ (D) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

7. ಯಾವುದೇ A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಿಗೆ, $\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \cap (A \cap B)$ ಯು

(A) ϕ (B) $A \cup B$ (C) $A \cap B$ (D) $A' \cap B'$

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ ?

(A) $A \setminus B = A \cap B'$ (B) $A \setminus B = A \cap B$

(C) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B'$ (D) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

9. ಯಾವುದೇ A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಗಣಗಳಿಗೆ, $B \setminus (A \cup C)$ ಯು

(A) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (B) $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$

(C) $(B \setminus A) \cap (A \setminus C)$ (D) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

10. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$ ಮತ್ತು $n(A \cup B) = 40$ ಆದರೆ, $n(A \cap B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70.

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ ಯು ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, (x, y) ಎಂಬುದು

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ ಯು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, 'a' ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ ಎಂಬುದು $\mathbb{N}$ ನಿಂದ $\mathbb{Z}$ ಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು

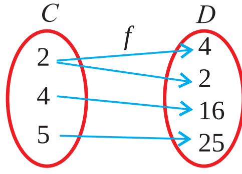
(A) $\{ 1\}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{ 1, -1 \}$ (D) $\mathbb{Z}$

14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ ಆದರೆ, 3 ರ ಪೂರ್ವಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳು

(A) 5 ಮತ್ತು –1 (B) 6 ಮತ್ತು 8 (C) 8 ಮತ್ತು –1 (D) 6 ಮತ್ತು 5.

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$, $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ ಮತ್ತು $f : A \to B$ ಎಂಬುದು $f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ f ಎಂಬುದು

(A) ಒಂದು–ಒಂದು (B) ಮೇಲಣ (C) ಉಭಯಕ್ಷೇಪ (D) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ

16. 

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು

(A) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (B) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ

(C) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (D) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ

17. $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ಆಗಿದ್ದು, $f: A \to B$ ನ್ನು $f(x) = x - 2$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದರೆ, f ನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು

(A) $\{1, 4, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{2, 3, 4\}$ (D) $\{3, 4, 5\}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ ಆದರೆ, $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಏಕಾಂಶ ಗಣವಾದರೆ, ಆ ಉತ್ಪನ್ನವು

(A) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (B) ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ

(C) ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ (D) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ

20. $f: A \to B$ ಯು ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು $n(A) = 5$ ಆದರೆ, $n(B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಗಣಗಳು

- ಗಣವು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ.
  - ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  - ಗಣಗಳ ಛೇದನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  - ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.
  - ಗಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಲ್ಲದವುಗಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಗಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮಗಳು
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ಗಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು
  - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- ಪೂರಕತೆಗೆ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗದ ಪ್ರಧಾನತೆಗೆ ಸೂತ್ರಗಳು
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  - $n(A \cup B \cup C)$
    $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

- B ನೊಂದಿಗೆ A ನ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು
  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ ಮತ್ತು $b \in B\}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
- A ಯಿಂದ B ಗಿರುವ R ಸಂಬಂಧವು $A \times B$ ನ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $R \subseteq A \times B$.
- $f : X \to Y$ ಉತ್ಪನ್ನವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in X$ ಎಂಬುದು ಒಂದೇ ಒಂದು $y \in Y$ ನೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರಬೇಕು.
- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯವಲ್ಲ.
- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸಿದರೆ, ಆ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.
- ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.
  - ಅಣಿತ ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ
  - ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರ
  - ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕ
  - ಒಂದು ನಕ್ಷೆ
- ನಿಯತಗುಣಕ ಅಥವಾ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆ ಉತ್ಪನ್ನ $y = |x|$ ಎಂಬುದನ್ನು $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ಆದಾಗ} \\ -x, & x < 0 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.
- ಉತ್ಪನ್ನದ ಕೆಲವು ವಿಧಗಳು:
  - ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (ಅಂತಃಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ) (ಭಿನ್ನ ಅಂಶಗಳು ಭಿನ್ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ)
  - ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ (ಪರಿಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ) (ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಸಹಕ್ಷೇತ್ರವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)
  - ಉಭಯಕ್ಷೇಪ ಉತ್ಪನ್ನ (ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಎರಡೂ ಆಗಿವೆ)
  - ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಏಕಾಂಶ ಗಣವಾಗಿದೆ)
  - ಅನನ್ಯತಾ ಉತ್ಪನ್ನ (ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಒಳಮುಖ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸುತ್ತದೆ)

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಬಹುಮಾನಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಏಳು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳನ್ನು 2000 ರಲ್ಲಿ ಯು.ಎಸ್.ಎ. ನಲ್ಲಿರುವ ಕ್ಲೇ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಇನ್ಸ್ಟಿಟ್ಯೂಟ್ ತಿಳಿಸಿತು. ಆಗಸ್ಟ್ 2010 ರಂತೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ಆರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಪರಿಹಾರವಾಗದೇ ಉಳಿದಿವೆ. ಯಾವುದೇ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಆ ಸಂಸ್ಥೆಯು US (ಯು.ಎಸ್.) \$1000,000 ಬಹುಮಾನವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. 2010 ರಲ್ಲಿ ರಷ್ಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಗಿರಿಗೋರಿ ಪೆರಲ್‌ಮಾನ್‌ರವರು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಪರಿಹರಿಸಿದರು. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಅವರು ಸಹಸ್ರಮಾನದ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆದರು.

2

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು

Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics - *C.F.Gauss*

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಶ್ರೇಢಿಗಳು
- ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ (A.P.)
- ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (G.P.)
- ಶ್ರೇಣಿಗಳು



ಲಿಯೋನಾರ್ಡೊ ಪಿಸಾನೊ (ಫಿಬೊನೇಸಿ)

(1170-1250)

ಇಟಲಿ

ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಪುನರುಜ್ಜೀವನಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ಫಿಬೊನೇಸಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿದ್ದರು. 'ಫಿಬೊನೇಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು' ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಇವರು ತಿಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಇವರ ಹೆಸರು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಫಿಬೊನೇಸಿಯು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ.

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯೋಣ. ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ದೀರ್ಘ ಇತಿಹಾಸದೊಂದಿಗೆ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ವಿಷಯಗಳಾಗಿವೆ. ಅವು ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧನಗಳಾಗುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಇತರೆ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಸಾಧನಗಳಾಗಿವೆ.

$\mathbb{N}$ ಮತ್ತು $\mathbb{R}$ ಅಕ್ಷರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸ್ಮರಿಸೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ವಾಸ್ತವ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

(i) ISRO (ಇಸ್ರೋ) ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಒಂದು ತಂಡವು ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಒಂದು ಉಪಗ್ರಹದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಸಮಯದ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ ದಾಖಲಿಸುತ್ತಾರೆ.

(ii) ರೈಲ್ವೆ ಮಂತ್ರಿಮಂಡಲವು ಚೆನ್ನೈನಲ್ಲಿರುವ ಕೇಂದ್ರ ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನ ಭೇಟಿ ನೀಡುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಯಸಿತು ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕಾಗಿ 180 ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯ ಕೇಂದ್ರ ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸುವ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಯಿತು.

(iii) 9 ನೆಯ ತರಗತಿಯ ಕುತೂಹಲವುಳ್ಳ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಸಕ್ತಗೊಂಡು, $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆಯಲು ಆರಂಭಿಸಿದನು.

(iv) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅಂಶವು 1 ಆಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಆಸಕ್ತನಾಗಿ, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆದನು.

(v) ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕಿಯೊಬ್ಬರು ತನ್ನ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಹೆಸರಿನ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆದರು.

(vi) ಅದೇ ಶಿಕ್ಷಕಿಯು ಅದೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು $35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100$ ಎಂಬಂತೆ ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

(iii) ಮತ್ತು (iv) ರಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (i), (ii), (v) ಮತ್ತು (vi) ರಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದರೆ (v) ಮತ್ತು (vi) ರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

2.2 ಶ್ರೇಢಿಗಳು (Sequences)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆ ಅಥವಾ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿದೆ.

(i) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_j ಎಂಬುದು ಶ್ರೇಢಿಯ j ನೇ ಪದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು a_7 ಎಂಬುದು ಏಳನೇ ಪದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, (i), (ii), (v) ಮತ್ತು (vi) ಎಂಬವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಹಾಗೂ (iii) ಮತ್ತು (iv) ಎಂಬವು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವುದು ಎಂದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುರುತಿಸಿದ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದರ್ಥವಾಗಿದೆ. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳು)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots .$ (1 ಮತ್ತು -1 ರ ನಡುವೆ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟವಾಗುವ ಪದಗಳು)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (ಒಂದೇ ಪದಗಳು; ಇಂತಹ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ.)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots .$ (ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots .$

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯದ n ನೇ ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ ಶಿರ ಅಥವಾ ಪುಚ್ಛಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $a_n = 1$ ಅಥವಾ 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, (i) ಮತ್ತು (iii) ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಹಾಗೂ ಇನ್ನುಳಿದ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ. (i) ರಿಂದ (v) ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವಿಕೆಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾದರಿ ಅಥವಾ ನಿಯಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ (vi) ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದವು 1 ಅಥವಾ 0 ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಆದರೂ ಕೂಡ ಆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದವನ್ನು ಮೊದಲೇ

ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪಡೆಯುವುದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು "ಮಾದರಿ" ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

2.2.1 ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ನೋಡುವುದು (Sequences viewed as functions)

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ ಎಂಬ ಒಂದು ಪರಿಮಿತವಾದ ವಾಸ್ತವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$ ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರುವ $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಅಥವಾ $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ವಾಸ್ತವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ ರಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರುವ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

$\forall$ ಸಂಕೇತವು "ಎಲ್ಲಾ" ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. $\{a_k\}_1^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ a_k ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $\{1, 2, 3, \cdots, \}$ ಅಥವಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಗಣಗಳು ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಗಣಗಳು ಪ್ರತಿಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರಲೇಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ ಆಗಿರುವ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವಿಕೆಯು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. f ನ ಕ್ಷೇತ್ರವು $\mathbb{N}$ ಅಥವಾ $\mathbb{N}$ ನ $\{1, 2, \cdots, n\}$ ಉಪಗಣವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಮನಗಾಣಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 2.1

n ನೇ ಪದವು $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ , $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

$n = 1$, ಆದರೆ, $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2$, ಆದರೆ, $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, $n = 3$, ಆದರೆ, $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳೆಂದರೆ 1, 5 ಮತ್ತು 14.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ನೇರವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.2

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $a_1 = -1,\quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$ ಮತ್ತು $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$

ಪರಿಹಾರ

(i) $a_1 = -1$ ಮತ್ತು $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+2},\ n > 1$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಗತ್ಯವಾದ ಪದಗಳು $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}$ ಮತ್ತು $-\frac{1}{840}$ ಆಗಿವೆ.

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $n = 3, 4, 5, \cdots$ ಗಳಿಗೆ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$F_1 = 1, F_2 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$\therefore$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳು 1, 1, 2, 3, 5 ಆಗಿವೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $n = 3, 4, 5, \cdots$ ಗಳಿಗೆ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ಆಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪದಗಳನ್ನು 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $\cdots$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಳ ಜೋಡಣೆಯಿರುವಂತೆ ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಳ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಸುತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಕೆಳಗಿನ n ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $a_n = \dfrac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \dfrac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. ಕೆಳಗಿನ n ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸೂಚಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3};\ a_7, a_9$ (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1);\ a_5, a_8$

   (iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1;\ a_5, a_7.$ (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2);\ a_5, a_8$

3. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ 18 ನೇ ಮತ್ತು 25 ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \end{cases}$$

4. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ 13 ನೇ ಮತ್ತು 16 ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N} \text{ ಮತ್ತು } n \text{ ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ} \end{cases}$$

5. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_1 = 2,\ a_2 = 3 + a_1$ ಮತ್ತು $n > 2$ ಗಳಿಗೆ $a_n = 2a_{n-1} + 5$.

6. ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಆರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ಮತ್ತು $n > 3$ ಗಳಿಗೆ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

2.3 ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ (Arithmetic Progression) (A.P.)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷವಾದ ವಿಧಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

d ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು d ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ (A.P) ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(i) 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$ ಎಂಬುದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ. ಏಕೆಂದರೆ $a_1 = 2$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 3$.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ ಎಂಬುದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ. ಏಕೆಂದರೆ $a_1 = -4$ ಮತ್ತು $d = 0$.

(iii) 2, 1.5, 1, 0.5, 0, -0.5, -1.0, $-1.5, \cdots$ ಎಂಬುದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ. $a_1 = 2$ ಮತ್ತು $d = -0.5$.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (The general form of an A.P.)

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ನಾವು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $a_1 = a$ ಮತ್ತು $a_{n+1} = a_n + d$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$n = 1, 2, 3$ ಗಳಿಗೆ,

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

ಇದೇ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, ನಾವು n ನೇ ಪದ a_n ನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $n \in \mathbb{N}$ ಗಳಿಗೆ $a_n = a + (n-1)d$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯು $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೂ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವು ಎಲ್ಲಾ $n \in \mathbb{N}$ಗಳಿಗೆ $t_n = a + (n-1)d$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯು n ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಕೊನೆಯ ಪದ l ಎಂಬುದು $l = a + (n-1)d$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $l = a + (n-1)d$ ಎಂಬುದನ್ನು $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದು ಮೊದಲ ಪದ, ಕೊನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

(iii) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು $m-d,\ m,\ m+d$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(iv) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು $2d$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(v) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ಅದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

(vi) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಅದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.3

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿವೆ?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು t_n, $n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\quad t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$

$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $\quad t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots$.

$\therefore \quad t_2 - t_1 = (3m-3) - (3m-1) = -2$

ಹಾಗೆಯೇ, $\quad t_3 - t_2 = (3m-5) - (3m-3) = -2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಮೊದಲ ಪದ $3m-1$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ -2 ರೊಂದಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.4

ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಮೊದಲ ಪದ $a = 5$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 2 - 5 = -3$.

(ii) ಮೊದಲ ಪದ $a = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.5

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ t_n ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವಂತೆ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ, $a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

$t_n < 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮೊದಲ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

ಇದು ಕನಿಷ್ಠ $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $a + (n-1)d < 0$ ಪರಿಹರಿಸುವಂತೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ಕನಿಷ್ಠ $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$ ಪರಿಹರಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20$

$\Longrightarrow (n-1) \times \frac{3}{4} > 20$ (ಎರಡು ಕಡೆಯೂ -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಸಮತೆಯು ಹಿಮ್ಮುಖಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.)

$\therefore \quad n - 1 > 20 \times \frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$.

$\Longrightarrow n > 26\frac{2}{3} + 1$. ಅಂದರೆ, $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಸಮತೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವ ಕನಿಷ್ಠ $n \in \mathbb{N}$ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $n = 28$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ (t_{28}) 28 ನೇ ಪದವು ಮೊದಲ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.6

ಒಂದು ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 23 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳು, ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 21, ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 19 ಮತ್ತು ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿದು ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳಿವೆ. ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳ ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಿವೆ?

ಪರಿಹಾರ ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಆಗಿರಲಿ.

ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, . . . , n ನೇ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 23, 21, 19, $\cdots$, 5.

$k = 2, \cdots, n$ ಗಳಿಗೆ $t_k - t_{k-1} = -2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, 23, 21, 19, $\cdots$, 5 ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 23$, $d = -2$ ಮತ್ತು $l = 5$.

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೂದೋಟದಲ್ಲಿ ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳ 10 ಸಾಲುಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.7

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ₹30,000 ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನದೊಂದಿಗೆ 2010 ರಲ್ಲಿ ಅವನ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸೇರಿದನು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ₹600 ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವನ ವೇತನವು ₹39,000 ಆಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ₹39,000 ಆಗುವಂತಿರಲಿ.

$2010, 2011, 2012, \cdots, [2010 + (n-1)]$ ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹30,000, ₹30,600, ₹31,200, ⋯ , ₹39000 ಆಗುತ್ತದೆ.

ವೇತನಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಅಗತ್ಯವಾದ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 100 ರಿಂದ ನಾವು ಭಾಗಿಸೋಣ. ಈಗ $300, 306, 312, \cdots, 390$ ಹೊಸ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 300$, $d = 6$, $l = 390$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯಕ್ತಿಯ 16 ನೇ ವರ್ಷದ ವೇತನವು ₹39,000 ಆಗಿದೆ.

$\therefore$ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು 2025 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ₹39,000 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.8

ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2:5:7$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 7 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ $x\,(x \neq 0)$ ಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2x, 5x$ ಮತ್ತು $7x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ, $2x, 5x-7, 7x$ ಎಂಬವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore \ (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $x = 14$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 28, 70, 98 ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು 6 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 5 ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $125, 120, 115, 110, \cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 15 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $24, 23\frac{1}{4}, 22\frac{1}{2}, 21\frac{3}{4}, \cdots$. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವ ಪದವು 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ?

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \cdots$. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 12 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. 4, 9, 14, $\cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 17 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$.   (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 9 ನೇ ಪದವು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, ಇದರ 29 ನೇ ಪದವು 19 ನೇ ಪದದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 10 ನೇ ಮತ್ತು 18 ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 41 ಮತ್ತು 73 ಆದರೆ, 27 ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. .

9. 1, 7, 13, 19,$\cdots$ ಮತ್ತು 100, 95, 90, $\cdots$ ಎರಡು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ನೇ ಪದಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 13 ರಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ?

11. ದೂರದರ್ಶನ ಉತ್ಪಾದಕರೊಬ್ಬರು ಏಳನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 1000 ದೂರದರ್ಶನಗಳು ಮತ್ತ ಹತ್ತನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 1450 ದೂರದರ್ಶನಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಳವಾದರೆ, ಮೊದಲ ವರ್ಷ ಮತ್ತು 15 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ದೂರದರ್ಶನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಮೊದಲ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ₹640 , ಎರಡನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ₹720 ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ₹800 ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಅವರು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ, 25 ನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಅವರ ಉಳಿತಾಯವೆಷ್ಟು?

13. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 6 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು –120 ಆದರೆ, ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 18 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 140 ಆದರೆ, ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ m ನೇ ಪದದ m ರಷ್ಟು ಅದರ n ನೇ ಪದದ n ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, $(m+n)$ ನೇ ಪದವು ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ₹25,000 ವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 14% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ಠೇವಣಿ ಹೂಡುತ್ತಾನೆ. ಈ ಮೊಬಲಗುಗಳು (ಅಸಲು + ಬಡ್ಡಿ) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆಯೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ, 20 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಹೂಡಿಕೆಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. a, b, c ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. a, b, c ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ ಎಂಬವೂ ಕೂಡ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. a^2, b^2, c^2 ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ಎಂಬವೂ ಕೂಡ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $a^x = b^y = c^z, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ ಮತ್ತು $b^2 = ac$ ಆದರೆ, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ಎಂಬವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2.4 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (Geometric Progression) (G.P.)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

r ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $a_{n+1} = a_n r$, $n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) $3, 6, 12, 24, \cdots$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $\{a_n\}_1^\infty$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$.

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (The general form of a G.P.)

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ. $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ r ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $a_1 = a$ ಮತ್ತು $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $a_{n+1} = r\, a_n$

$n = 1, 2, 3$ ಆದಾಗ,

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

ಇದೇ ನಮೂನೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ,

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $a_n = ar^{n-1}$ ಎಂಬುದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯು

$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದದ ಸೂತ್ರವು

$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ ಆಗಿದೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಬಹುದು?

r ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು, $\frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \forall\, n \in \mathbb{N}$ ಆದರೆ, $\{t_n\}_1^\infty$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವಾಗಿರದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪದ ಮತ್ತು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದದ ಅನುಪಾತವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದರೆ, ಇದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಅದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿಯೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

(iii) ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು r ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ $\frac{a}{r}, a, ar$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(iv) ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$.ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (ಇಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು ಮೇಲಿನಂತೆ r ಆಗಿರದೇ r^2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

ಉದಾಹರಣೆ 2.9

ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ?

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$.

(iii) $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, 3\sqrt{21}, \cdots$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.
ಅಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತವು ಸಮವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.

(ii) $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$.
ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $\frac{1}{10}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

(iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$
ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $\sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.10

ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೊತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು $\frac{2}{5}$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \quad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದವು 0.02 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.11

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಾಲ್ಕನೇ ಪದವು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು ಏಳನೇ ಪದವು $\frac{16}{81}$ ಆದರೆ, ಆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $t_4 = \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $t_7 = \frac{16}{81}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕಾಗಿ, $t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$. ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು

$$t_4 = ar^3 = \frac{2}{3} \text{ ಮತ್ತು } t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}.$$

ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, a ಮತ್ತು r ಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

t_4 ರಿಂದ t_7 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. ಇದರಿಂದ, $r = \frac{2}{3}$.

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\Longrightarrow \quad a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}. \qquad \therefore \quad a = \frac{9}{4}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots$.

ಅಂದರೆ, $\frac{9}{4},\ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right),\ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \cdots$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.12

ಒಂದು ಕೃಷಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಂಟೆಗೆ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 30 ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳಿದ್ದರೆ, 14 ನೇ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳಿರುತ್ತವೆ?

ಪರಿಹಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಕೃಷಿಯ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 30$

ಮೊದಲ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2(30)$

ಎರಡನೇ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 2(2(30)) = 30(2^2)$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $r = 2$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, t_n ಎಂಬುದು n ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವು $t_n = 30\,(2^n)$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 14 ನೇ ಗಂಟೆಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬ್ಯಾಕ್ಟೀರಿಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $t_{14} = 30\,(2^{14})$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.13

ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ₹500 ರ ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 10% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ದರದಂತೆ ಠೇವಣಿ ಹೂಡಲಾಗಿದೆ. 10 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಈ ಠೇವಣಿಯ ಬೆಲೆಯೇನು?

ಪರಿಹಾರ

ಅಸಲು ₹500 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಈ ಅಸಲಿಗೆ ಆಗುವ ಬಡ್ಡಿಯು $500\left(\frac{10}{100}\right) = 50$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು = ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಅಸಲು + ಬಡ್ಡಿ

$$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

ಈಗ, ಎರಡನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿ $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ,

n ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}$

$(n-1)$ ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತ = n ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅಸಲು.

ಆದ್ದರಿಂದ, 10 ನೇ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತ $= ₹\ 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{10} = ₹\ 500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$.

ಗಮನಿಸಿ

ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಬಹುದು. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ:

$$A = P(1 + i)^n$$

ಇಲ್ಲಿ, A ಎಂಬುದು ಮೊತ್ತ, P ಎಂಬುದು ಅಸಲು, $i = \frac{r}{100}$, r ಎಂಬುದು ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯ ದರ ಮತ್ತು n ಎಂಬುದು ವರ್ಷಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.14

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{13}{12}$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳು $\frac{a}{r}, a, ar$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$$

$$a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \implies a\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12} \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ,

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$$

$$\implies a^3 = -1 \qquad \therefore \quad a = -1$$

$a = -1$ ನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$(-1)\left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\implies 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r + 4)(4r + 3) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = -\frac{4}{3}$ ಅಥವಾ $-\frac{3}{4}$

$r = -\frac{4}{3}$ ಮತ್ತು $a = -1$ ಆದಾಗ, ಪದಗಳು $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ ಆಗಿವೆ.

$r = -\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $a = -1$ ಆದಾಗ, ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ ಪದಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.15

a, b, c, d ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ a, b, c, d ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು r ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಪದವು a ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

ಈಗ, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2$$

$$= a^2[(r - r^2)^2 + (r^2 - 1)^2 + (r^3 - r)^2]$$

$$= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2]$$

$$= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3 - 1]^2$$

$$= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a - d)^2$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $0.12,\ 0.24,\ 0.48, \cdots.$ (ii) $0.004,\ 0.02,\ 0.1, \cdots.$ (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots.$

   (iv) $12,\ 1,\ \frac{1}{12}, \cdots.$ (v) $\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots.$ (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots.$

2. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 10 ನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 4 ನೇ ಪದ ಮತ್ತು 7 ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 54 ಮತ್ತು 1458 ಆದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲನೇ ಪದವು $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಆರನೇ ಪದವು $\frac{1}{729}$ ಆದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. (i) $5,\ 2,\ \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \cdots$ ರಲ್ಲಿ $\frac{128}{15625}$ (ii) $1,\ 2,\ 4,\ 8, \cdots$ ರಲ್ಲಿ 1024 ಎಂಬವು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದಗಳಾಗಿವೆ?

6. $162, 54, 18, \cdots$ ಮತ್ತು $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ನೇ ಪದಗಳು ಸಮವಾದರೆ, n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಐದನೇ ಪದವು 1875 ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಪದವು 3 ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{39}{10}$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 1 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 216 ಮತ್ತು ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೊತ್ತವು 156 ಆದರೆ, ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 7 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{7}{4}$ ಆದರೆ, ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 13 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 91 ಆದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ₹1000 ವನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕ 5% ರ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ದರದಂತೆ ಠೇವಣಿ ಹೂಡಲಾಗಿದೆ. 12 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯು ₹50,000 ಕ್ಕೆ ನಕಲು ಮಾಡುವ ಒಂದು ಯಂತ್ರವನ್ನು ಖರೀದಿಸಿತು. ನಕಲು ಯಂತ್ರವು ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ 45% ದರದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅಂದಾಜಿಸಲಾಗಿದೆ. 15 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಯಂತ್ರದ ಬೆಲೆ ಏನು?

14. a, b, c, d ಗಳು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(a-b+c)(b+c+d) = ab+bc+cd.$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. a, b, c, d ಗಳು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a+b,\ \ b+c,\ \ c+d,$ ಗಳು ಕೂಡಾ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2.5 ಶ್ರೇಣಿಗಳು (Series)

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ:

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 1990 ರ ಜನವರಿ 1 ರಂದು ₹25,000 ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದ್ಯೋಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ₹500 ರ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. 2010 ರ ಜನವರಿ 1 ರವರೆಗೆ ಅವನು ಪಡೆದ ಒಟ್ಟು ವೇತನವೆಷ್ಟು?

ಮೊದಲು, ಅವನ ವಾರ್ಷಿಕ ವೇತನವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500, \cdots,\ (25000 + 19(500)).$$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲು, ಅವನ ಇಪ್ಪತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ವೇತನವನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಬೇಕಿದೆ. ಅಂದರೆ,

$$25000 + 25500 + 26000 + 26500 + \cdots + (25000 + 19(500)).$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಬೇಕಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಕಲನದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು **ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $n \in \mathbb{N}$ ಗೆ $S_n = a_1 + a_2 +, \cdots + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ ರಿಂದ ಆಂಶಿಕ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯ **ಆಂಶಿಕ ಮೊತ್ತಗಳ** ಶ್ರೇಢಿಯು $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ಆಗಿದೆ.

$(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ ಅಣಿತಯುಗ್ಮವನ್ನು $\{a_n\}_1^{\infty}$ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ **ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, $\sum$ (ಸಿಗ್ಮ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತವು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು (ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಸಂಕಲನ) ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸಾಧಾರಣ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಸಂಕಲನವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪದಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು? ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸೋಣ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ.

2.5.1 ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ (Arithmetic series)

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯು ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಪದಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ $a,\ a + d,\ a + 2d, ...,\ a + (n-1)d, \cdots$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು S_n ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a + (n-1)d)$

$$\Longrightarrow S_n = na + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d)$$

$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಇದು $1, 2, 3, \cdots, (n-1)$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತವಲ್ಲದೇ ಬೇರೇನೂ ಅಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ ಮೊದಲ n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$ ಆಗಿರಲಿ. (1)

ಮೇಲಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸೋಣ. S_n ನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$ (2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$. (3)

(3) ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು $(n+1)$ ಗಳಿವೆ?

(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ n ಪದಗಳಿವೆ. (1) ಮತ್ತು (2) ರ ಅನುಗುಣವಾದ ಪದಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಲ್ಲಿ n ರಷ್ಟು $(n+1)$ ಗಳು ಇರಲೇಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, (3) ಎಂಬುದು $2S_n = n(n+1)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸರಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ಆಗಿದೆ. (4)

ಇದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

100 ರವರೆಗಿನ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು **ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ದೊರೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ **ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್ರಿಕ್ ಗಾಸ್** ಬಳಸಿದರು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಇವರ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರು ಇವರಿಗೆ ಕೇವಲ ಐದು ವರ್ಷಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ನೀಡಿದ್ದರು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗಕ್ಕೆ ನೀವು ಹೋದಾಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಬೇರೆ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.



ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್ರಿಕ್ ಗಾಸ್
(1777 – 1855)

ಈಗ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ನೋಡಿರುವಂತೆ

$$S_n = na + [d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d]$$

$$= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$

$$= na + d\frac{n(n-1)}{2}$$ (4) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು

$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ (5)

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}\text{ (ಮೊದಲ ಪದ + ಕೊನೆಯ ಪದ)}$$

$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

ಮೊದಲ ಪದ a ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಎಂಬುದು

(i) ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ಆಗಿದೆ.

(ii) ಕೊನೆಯ ಪದ l ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.16

$5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $5 + 11 + 17 + \cdots + 95$ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$a = 5,\quad d = 11 - 5 = 6,\quad l = 95$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $n = \frac{l-a}{d} + 1$

$$= \frac{95-5}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊತ್ತ $S_n = \frac{n}{2}[l + a]$

$$S_{16} = \frac{16}{2}[95 + 5] = 8(100) = 800.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.17

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ $2n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ $2n$ ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

$= 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \cdots$ $2n$ ಪದಗಳವರೆಗೆ

$= (1-4) + (9-16) + (25-36) + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ (ಗುಂಪು ಮಾಡಿದ ನಂತರ)

$= -3 + (-7) + (-11) + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ

ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯು ಮೊದಲ ಪದ $a = -3$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -4$ ರೊಂದಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಮೊತ್ತ $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)(-4)]$$

$$= \frac{n}{2}[-6 - 4n + 4] = \frac{n}{2}[-4n - 2]$$

$$= \frac{-2n}{2}(2n + 1) = -n(2n + 1).$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.18

ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು -203 ಮತ್ತು ನಂತರದ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು -572 ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $S_{14} = -203$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{14}{2}[2a+13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 7[2a+13d] = -203$$

$$\Longrightarrow \quad 2a+13d = -29. \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ, ನಂತರದ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $= -572$.

ಈಗ, $S_{25} = S_{14} + (-572)$

ಅಂದರೆ, $S_{25} = -203 - 572 = -775$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a+24d] = -775$$

$$\Longrightarrow \quad 2a+24d = -31 \times 2$$

$$\Longrightarrow \quad a+12d = -31 \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, $a = 5$ ಮತ್ತು $d = -3$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯು $5 + (5-3) + (5+2(-3)) + \cdots$.

ಅಂದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯು $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.19

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$ ಎಂಬ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವು -351 ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ನಿರಂತರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, $a = 24$, $d = -3$.

$S_n = -351$ ಆಗುವಂತಹ n ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = -351$

ಅಂದರೆ, $\frac{n}{2}[2(24) + (n-1)(-3)] = -351$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48 - 3n + 3] = -351$$

$$\Longrightarrow \quad n(51 - 3n) = -702$$

$$\Longrightarrow \quad n^2 - 17n - 234 = 0$$

$$(n-26)(n+9) = 0$$

$\therefore \quad n = 26$ ಅಥವಾ $n = -9$

ಇಲ್ಲಿ, n ಎಂಬುದು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 26 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು -351 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.20

8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ 8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $104, 112, 120, \cdots, 992$ ಆಗಿವೆ.

S_n ಎಂಬುದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 + , \cdots + 992$.

ಈಗ, $104, 112, 120, \cdots, 992$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 104, \ d = 8$ ಮತ್ತು $l = 992$.

$$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992 - 104}{8} + 1$$

$$= \frac{888}{8} + 1 = 112.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376$.

ಇದರಿಂದ, 8 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 61376 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.21

ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಒಳ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಶ್ರೇಢಿಯ ಕನಿಷ್ಠ ಅಳತೆಯು 85° ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಅಳತೆಯು 215° ಆಗಿದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಒಳ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 85$ ಮತ್ತು $l = 215$.

$$S_n = \frac{n}{2}[l + a] \qquad (1)$$

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n-2)\times 180^0$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n = (n-2)\times 180$

(1) ರಿಂದ, $\frac{n}{2}[l + a] = (n-2)\times 180$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[215 + 85] = (n-2)\times 180$$

$$150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12..$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 12 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. ಮೊದಲ (i) 75 ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ (ii) 125 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. n ನೇ ಪದ $3 + 2n$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 30 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2$. (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 ಪದಗಳವರೆಗೆ.

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ S_n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $a = 5$, $n = 30$, $l = 121$ (ii) $a = 50$, $n = 25$, $d = -4$

5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 40 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 44 ಮತ್ತು ನಂತರದ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 55 ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $60, 56, 52, 48, \cdots$ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಮೊತ್ತವು 368 ಆಗುತ್ತದೆ?

8. 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಮೂರನೇ ಪದವು 7 ಮತ್ತು ಏಳನೇ ಪದವು ಮೂರನೇ ಪದದ ಮೂರರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 2 ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ 300 ಮತ್ತು 500 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಬಿಡಿಸಿರಿ: $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$.

12. 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದ 100 ಮತ್ತು 200 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ನಿರ್ಮಾಣ ಸಂಸ್ಥೆಗೆ ಸೇತುವೆ ನಿರ್ಮಾಣವನ್ನು ತಡ ಮಾಡಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರತಿ ದಿನವೂ ದಂಡವನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ದಂಡವು ಮೊದಲನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ₹4000 ಮತ್ತು ನಂತರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ₹1000 ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಸ್ಥೆಯ ಆಯವ್ಯಯದ ಪ್ರಕಾರ ಗರಿಷ್ಠ ₹1,65,000 ದಂಡವನ್ನು ಪಾವತಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ತಡಮಾಡಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಟ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಪ್ರತೀ ವರ್ಷ ₹1000 ವನ್ನು 8% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯ ದರದಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿ ಹೂಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತೀ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಬಡ್ಡಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದೇ? ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, 30 ವರ್ಷಗಳ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೆ ಸಿಗುವ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $3n^2 - 2n$. ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವು ಒಂದು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾರಿ, ಎರಡು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾರಿ ಮತ್ತು ಹೀಗೆಯೇ ಗಂಟೆ ಬಾರಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ದಿನಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಗಂಟೆ ಬಾರಿಸುತ್ತದೆ?

17. ಮೊದಲ ಪದ a, ಎರಡನೇ ಪದ b ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ c ಆಗಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವು $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $(2n+1)$ ಪದಗಳಿದ್ದರೆ, ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಅನುಪಾತವು $(n+1):n$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ m ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಅನುಪಾತವು $m^2 : n^2$ ಆದರೆ, m ನೇ ಪದ ಮತ್ತು n ನೇ ಪದಗಳ ಅನುಪಾತವು $(2m-1):(2n-1)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. ಒಬ್ಬ ಮಾಲಿಯು ತನ್ನ ತೋಟದಲ್ಲಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಾಕಾರದ ರಚನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಯೋಜಿಸುತ್ತಾನೆ. ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಉದ್ದವಾದ ಮೊದಲ ಸಾಲಿಗೆ 97 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿವೆ. ಪ್ರತೀ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಅಂತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ 25 ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಾಣವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕಿದೆ. ಅವನು ಎಷ್ಟು ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಬೇಕು?

2.5.2 ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ (Geometric series)

ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$r \neq 0$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ಎಂಬುದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ ಆಗಿರಲಿ. (1)

$r = 1$ ಆದರೆ, (1) ರಿಂದ $S_n = na$.

$r \neq 1$ ಗೆ, (1) ನ್ನು ಬಳಸಿ,

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \quad (2)$$

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\Longrightarrow \quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

ಇದರಿಂದ, $r \neq 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$.

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು,

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}, & r \neq 1 \text{ ಆದಾಗ} \\ na, & r = 1 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$$

ಇಲ್ಲಿ, a ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ.

ಗಮನಿಸಿ

$-1 < r < 1$ ಆದರೆ, $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \dfrac{a}{1 - r}$ ಸೂತ್ರವು ಅನ್ವಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.22

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 25 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ, $a = 16$, $r = -\dfrac{48}{16} = -3 \neq 1$. ಈಗ, $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $$S_{25} = \frac{16(1 - (-3)^{25})}{1 - (-3)} = \frac{16(1 + 3^{25})}{4} = 4(1 + 3^{25}).$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.23

ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ S_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಇಲ್ಲಿ, $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$

$$t_6 = 2(r)^5 = 486$$

$$\Longrightarrow \quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$$

$r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_6 = \dfrac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

$r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_5 = \dfrac{a(r^5 - 1)}{r - 1}$

$$= \frac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$

ಉದಾಹರಣೆ 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 1022 ಆಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ $2 + 4 + 8 + \cdots$.

n ಎಂಬುದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 2,\ r = 2,\ S_n = 1022.$

n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

$r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = \dfrac{a[r^n - 1]}{r - 1}$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1).$$

ಆದರೆ $S_n = 1022$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $2(2^n - 1) = 1022$

$$\Longrightarrow \quad 2^n - 1 = 511$$

$$\Longrightarrow \quad 2^n = 512 = 2^9.$$ ಆದ್ದರಿಂದ, $n = 9$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.25

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದ 375 ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಪದ 192 ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ r ಆಗಿರಲಿ.

$a = 375,\quad t_4 = 192$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $t_n = ar^{n-1}$

$\therefore\quad t_4 = 375\,r^3 \implies 375\,r^3 = 192$

$r^3 = \frac{192}{375} \implies r^3 = \frac{64}{125}$

$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \implies r = \frac{4}{5}$, ಇದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_{14} = \dfrac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1)\times 5\times 375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$

$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $r \neq 1$ ಆದರೆ, $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$ ಬಳಸುವುದರ ಬದಲಾಗಿ $S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right]$ ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2.26

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 72 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $a + ar + ar^2 + ar^3$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $r > 0$.

$a + ar = 8$ ಮತ್ತು $ar^2 + ar^3 = 72$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$

$\implies r^2(8) = 72 \quad \therefore\quad r = \pm 3$

$r > 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $r = 3.$

ಈಗ, $a + ar = 8 \implies a = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು $2 + 6 + 18 + 54$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ ಶ್ರೇಣಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ.

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ)

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ) (9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸಿ)

$= \frac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ]

$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots$ n ಪದಗಳವರೆಗೆ) $- n]$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$

ಉದಾಹರಣೆ 2.28

ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯವರು ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ 25 ಬೀದಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಿಡ ನೆಡಲು ಯೋಜಿಸಿ ಮೊದಲನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಿಡ, ಎರಡನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು, ಮೂರನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಬೀದಿಯಲ್ಲಿ ಎಂಟು, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾರೆ. ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಗಿಡಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ?

ಪರಿಹಾರ ಪಟ್ಟಣದ 25 ಬೀದಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ನೆಡಲ್ಪಟ್ಟ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. S_n ಎಂಬುದು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ 25 ಪದಗಳವರೆಗೆ

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1, \quad r = 2, \quad n = 25$

$$S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$S_{64} = (1)\,\frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾಗಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $2^{25} - 1$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 27 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ S_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8.$ (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12.$
4. ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) $1 + 11 + 111 + \cdots$ 20 ಪದಗಳವರೆಗೆ.
5. (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ ರ ಮೊತ್ತವು 1092 (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ ರ ಮೊತ್ತವು 728
   ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು?
6. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡನೇ ಪದವು 3 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು $\frac{4}{5}$. ಮೊದಲ 23 ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 36 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots.$ (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots.$
9. ಮೊದಲ ವಾರದಲ್ಲಿ ಐದು ಜನ ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಎರಡನೇ ವಾರದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ನಾಲ್ಕು ಜನರಿಗೆ ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗವನ್ನು ಹರಡುತ್ತಾರೆ. 15 ನೇ ವಾರದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ, ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾದ ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಬ್ಬ ಮಾಲಿಯು ಹುಡುಗನೊಬ್ಬನಿಗೆ ಅವನ ಉತ್ತಮ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಬಹುಮಾನವಾಗಿ ನೀಡಲು ಬಯಸಿ ಹುಡುಗನಿಗೆ ಎರಡು ಆಯ್ಕೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾನೆ. ಹುಡುಗನು ಒಂದೇ ಬಾರಿಗೆ 1000 ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಮೊದಲನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 1, ಎರಡನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 2, ಮೂರನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 4, ನಾಲ್ಕನೇ ದಿನಕ್ಕೆ 8, ಹೀಗೆ ಹತ್ತು ದಿನಗಳವರೆಗೆ ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾವಿನಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಹುಡುಗನು ಯಾವ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

11. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮೂರರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n, $2n$ ಮತ್ತು $3n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕ್ರಮವಾಗಿ S_1, S_2 ಮತ್ತು S_3 ಆದರೆ, $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಗಮನಿಸಿ

$a = 1$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ $x \neq 1$ ರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡ ಭಾಗವು ಘಾತ $n - 1$ ರ x ನಲ್ಲಿರುವ ವಿಶೇಷ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವು ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

2.5.3 ವಿಶೇಷ ಶ್ರೇಣಿಗಳು (Special series) $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ಮತ್ತು $\sum_{k=1}^{n} k^3$

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ Σ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಮೊತ್ತಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ.

ಸಿಗ್ಮಾ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

ಕ್ರ. ಸಂ.	ಸಂಕೇತ	ವಿಸ್ತರಣೆ
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ ಅಥವಾ $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n - 1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d + 5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	$3[1 + 1 + \cdots 10$ ಪದಗಳು$] = 30.$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು $a = 1, d = 1$ ಮತ್ತು $l = n$ ರೊಂದಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬಳಸಿಯೂ ಕೂಡ $S_n = \dfrac{n}{2}(a + l) = \dfrac{n}{2}(1 + n)$ ಎಂಬಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಸಿಗ್ಮಾ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ಮತ್ತು (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ:

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇದು $a = 1, d = 2,\ l = (2n-1)$ ರೊಂದಿಗೆ n ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \qquad \left(S_n = \frac{n}{2}(a+l)\right)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (1)

ಗಮನಿಸಿ

1. ಸೂತ್ರ (1) ನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಿಂದಲೂ ಕೂಡ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = \frac{2(n)(n+1)}{2} - n = n^2.$$

2. $l = 2n-1 \Longrightarrow n = \frac{l+1}{2}$ ಆಗುವುದರಿಂದ, (1) ರ ಪ್ರಕಾರ, $1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$.

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$\therefore \quad k^3 - (k-1)^3 = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2$ ($a = k,\ b = k-1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

$\Longrightarrow \quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ (1)

$k = 1$ ಆದಾಗ, $\quad 1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$k = 2$ ಆದಾಗ, $\quad 2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$k = 3$ ಆದಾಗ, $\quad 3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1.$ ಇದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ,

$k = n$ ಆದಾಗ, $\quad n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1.$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $k = 1, 2, \cdots, n$ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿದರೆ,

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] - 3[1 + 2 + \cdots + n] + n$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] = n^3 + 3[1 + 2 + \cdots + n] - n$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$ (2)

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

ಕೆಳಗಿನ ನಮೂನೆಯನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸೋಣ.

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

ಈ ನಮೂನೆಯನ್ನು n ಪದಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \cdots + n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad (3)$$

(i) ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (ಕೊನೆಯ ಪದ l ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ),

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(v) ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.29

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 ಪದಗಳವರೆಗೆ (ii) $31 + 33 + \cdots + 53$

ಪರಿಹಾರ

(i)
$$26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 60) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 25)$$
$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$
$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$
$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $n = 25$

$\therefore$ $1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 ಪದಗಳವರೆಗೆ $= 25^2$ $\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \right)$

$= 625.$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$

$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2$ $\left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 \right)$

$= 27^2 - 15^2 = 504.$

ಉದಾಹರಣೆ 2.30

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$

$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$ $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$

$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$

$\therefore$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$

(ii) ಈಗ, $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$

$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$

$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$

$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$

$= 14910 - 506 = 14404.$

(iii) ಈಗ, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots 50^2)$

$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4 \times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.31

ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

ಪರಿಹಾರ

(i) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ ಬಳಸಿಕೊಂಡು}$$

$$= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

$$= \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406+55)(406-55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2.32

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ ಆದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ k ಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6 \times 6 \times 11 \times 11$$

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $\frac{k(k+1)}{2} = 66$

$$\Longrightarrow k^2 + k - 132 = 0 \quad \Longrightarrow (k+12)(k-11) = 0$$

k ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $k = 11$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2.33

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ ಆದರೆ, $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$ ಆದರೆ, $1+2+3+\cdots+n$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $1+2+3+\cdots+n = 120$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$$\therefore \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$$

(ii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 36100$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19\times19\times10\times10$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1+2+3+\cdots+n = 190$.

ಉದಾಹರಣೆ 2.34

ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 11 ಸೆಂ.ಮೀ., 12 ಸೆಂ.ಮೀ., $\cdots$, 24 ಸೆಂ.ಮೀ., ಆಗಿರುವ 14 ಚೌಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು $11^2+12^2+\cdots+24^2$ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

14 ಚೌಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 11^2+12^2+13^2+\cdots+24^2$

$$= (1^2+2^2+3^3+\cdots+24^2)-(1^2+2^2+3^3+\cdots+10^2)$$

$$= \sum_1^{24} n^2 - \sum_1^{10} n^2$$

$$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$$

$$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$$

$$= 4900 - 385$$

$= 4515$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.6

1. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1+2+3+\cdots+45$ (ii) $16^2+17^2+18^2+\cdots+25^2$

(iii) $2+4+6+\cdots+100$ (iv) $7+14+21\cdots+490$

(v) $5^2+7^2+9^2+\cdots+39^2$ (vi) $16^3+17^3+\cdots+35^3$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$ ಆದರೆ, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$ ಆದರೆ, $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ., 13ಸೆಂ.ಮೀ., $\cdots$, 23ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ 12 ಚೌಕಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಅಂಚುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 16 ಸೆಂ.ಮೀ., 17 ಸೆಂ.ಮೀ., 18 ಸೆಂ.ಮೀ., $\cdots$, 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ 15 ಘನಗಳ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.7

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸರಿಯಲ್ಲ?

(A) ಶ್ರೇಢಿಯು $\mathbb{N}$ ನ ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

(B) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(C) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

(D) ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯ 8 ನೇ ಪದ

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{20}$ ರ ಮುಂದಿನ ಪದ

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. a, b, c, l, m ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a - 4b + 6c - 4l + m$ ರ ಬೆಲೆಯು

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. a, b, c ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a-b}{b-c}$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು $100n+10$ ಆದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಢಿಯು

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ (B) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ

(C) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿ (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ

7. $\frac{a_4}{a_7} = \frac{3}{2}$ ಆಗುವಂತೆ $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ 13 ನೇ ಪದವು

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯು

(A) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (B) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ

(C) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ (D) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿ

9. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳು $k+2, 4k-6, 3k-2$ ಆದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. a, b, c, l, m, n ಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $3a+7, 3b+7, 3c+7, 3l+7, 3m+7, 3n+7$ ಗಳು

(A) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (B) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

(C) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ.

11. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೂರನೇ ಪದವು 2 ಆದರೆ, ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12. a, b, c ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a-b}{b-c}$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{b}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13. $x,\ 2x+2,\ 3x+3, \cdots$ ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $5x,\ 10x+10,\ 15x+15, \cdots$ ಗಳು

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (B) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

(C) ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಇಲ್ಲ.

14. $-3, -3, -3, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯು

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮಾತ್ರ (C) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯೂ ಅಲ್ಲ

(B) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಮಾತ್ರ (D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎರಡೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

15. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 256, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು 4 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಪದವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ 3 ನೇ ಪದವು

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ, $t_2 = \frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $t_3 = \frac{1}{5}$ ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$ ಆದರೆ, $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $(1 + \sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1 + \sec x)(1 + \sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1 - \sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1 + \sec x)(1 + \sec^3 x + \sec^4 x)$

18. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವು $t_n = 3 - 5n$ ಆದರೆ, ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು

(A) $\frac{n}{2}[1-5n]$ (B) $n(1-5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1+5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1+n)$

19. $a^{m-n},\ a^m,\ a^{m+n}$ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವು

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = k$ ಆದರೆ, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದಾಗಿದೆ.
- $F_1 = F_2 = 1$ ಮತ್ತು $n = 3, 4, 5, \cdots$ ಗಳಿಗೆ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ಆಗುವಂತಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಫಿಬೊನೇಸಿ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದು $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ ಆಗಿದೆ.
- $a_{n+1} = a_n + d, n \in \mathbb{N}$ ಮತ್ತು d ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು d ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವು $t_n = a + (n-1)d, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.
- $a_{n+1} = a_n r$, ಇಲ್ಲಿ $r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ಮತ್ತು r ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆದರೆ, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1 ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವು $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ ಆಗಿದೆ.
- ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಸಂಕಲನದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೊತ್ತವು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೊತ್ತವು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S_n ಎಂಬುದು $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$. ಇಲ್ಲಿ, l ಎಂಬುದು ಕೊನೆಯ ಪದ.
- ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \text{ ಆದಾಗ} \\ na &, \ r = 1 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$$

  ಇಲ್ಲಿ, a ಎಂಬುದು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು r ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.
- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.
- ಮೊದಲ n ಬೆಸ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (ಕೊನೆಯ ಪದ l ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ),

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಮೇರಿನ್ ಮರ್ಸೆನಿರವರ ಹೆಸರಿನಿಂದಿರುವ ಮರ್ಸೆನಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು $M = 2^p - 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ p ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. M ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದರೆ, ಇದನ್ನು ಮರ್ಸೆನಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಕುತೂಹಲವೆಂದರೆ, $2^p - 1$ ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾದರೆ, p ಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ತಿಳಿದಿರುವ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ $2^{43,112,609} - 1$ ಎಂಬುದು ಮರ್ಸೆನಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿದೆ.

3

ಬೀಜಗಣಿತ

The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra - Author unknown

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಬಹುಪದಗಳು
- ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ
- ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.
- ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು
- ವರ್ಗಮೂಲ
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು



ಆಲ್–ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿ (780-850) ಅರಬ್

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೂಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಆಲ್-ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿರವರ ಕೊಡುಗೆ-ಯು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಸತನಕ್ಕೆ ತಳಹದಿಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿತು. ಸರಳ ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೊದಲ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಅವರು ನೀಡಿದರು.

ಇವರನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸ್ಥಾಪಕರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೇಲಿನ ಇವರ ಕಾರ್ಯವು ಅರೇಬಿಕ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದ ಹಿಂದು-ಅರೇಬಿಕ್ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯ ಆಧಾರವಾಗಿ ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಿಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಲು ಕಾರಣವಾಯಿತು.

3.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ಬೀಜಗಣಿತವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮಹತ್ವವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ಹಳೆಯದಾದ ಶಾಖೆಯಾಗಿದೆ. ಮೂರನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ, ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಡಯೋಫಾಂಟಸ್‌ರವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ "ಅಂಕಗಣಿತ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದರು. ಆರನೆಯ ಮತ್ತು ಏಳನೆಯ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ, ಆರ್ಯಭಟ ಮತ್ತು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರಂತಹ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೇಲೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು.

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಅರಬ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅಧಿಕ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯು ಉಂಟಾಯಿತು. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, ಆಲ್–ಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿರವರ "ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ಮತ್ತು ಸರಿದೂಗಿಸುವುದರಿಂದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಮೇಲಿನ ಸಂಗ್ರಹ" ಪುಸ್ತಕವು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಮೈಲುಗಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅವರು ಆಲ್‌ಜಾಬ್ರ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಪದವನ್ನು ಲ್ಯಾಟಿನ್‌ನಲ್ಲಿ ಆಲ್‌ಜೀಬ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಧೆ ಅಥವಾ ಪುನರ್ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಎಂದು ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಗಿದೆ. 13 ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೇಲಿನ ಲಿಯೋನಾರ್ಡೊ ಫಿಬೋನೇಸಿರವರ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮಹತ್ವಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಭಾವಶಾಲಿಯಾಗಿದ್ದವು. ಇಟಲಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಲೂಕಾ ಪೇಸಿಯೋಲಿ (1445-1517) ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ರಾಬರ್ಟ್ ರೆಕಾರ್ಡೆ (1510-1558) ರವರ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯವು ಇನ್ನುಳಿದ ಪ್ರಭಾವಶಾಲಿಯಾದ ಕಾರ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. ನಂತರದ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವು ಹೆಚ್ಚು ಅಮೂರ್ತವಾಗಿ ಅರಳತೊಡಗಿತು ಮತ್ತು 19 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮುನ್ನಡೆಯನ್ನು ಪಡೆದರು. ಅಂಕಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪೀಕಾಕ್ (ಬ್ರಿಟನ್, 1791-1858) ರವರು ಸ್ವತಃ ಸಿದ್ಧ ಚಿಂತನೆಯ ಸಂಸ್ಥಾಪಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಇವರನ್ನು ಕೆಲವು ಸಮಯದಲ್ಲಿ "ಬೀಜಗಣಿತದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್" ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಮೂರ್ತ ಸಂಕೇತಗಳ ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪೀಕಾಕ್‌ರವರ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಡಿ ಮಾರ್ಗನ್ (ಬ್ರಿಟನ್, 1806-1871) ಮುಂದುವರಿಸಿದರು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹರಿಸುವ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಕಲಿಯುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಗಮನಹರಿಸೋಣ.

3.2 ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (System of linear equations in two unknowns)

9 ನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ x ನಲ್ಲಿರುವ $ax + b = 0, a \neq 0$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ, a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದಾದರೂ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿರುವ $ax + by = c$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $x = x_0$, $y = y_0$ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸಿದರೆ, (x_0, y_0) ಅಣಿತಯುಗ್ಮವನ್ನು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ, $ax + by = c$ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು (x, y) ಬಿಂದುವು $ax + by = c$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು (x, y) ಪರಿಹಾರವು ಈ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $ax + by = c$ ಸಮೀಕರಣವು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ, ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ, ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$x = x_0$, $y = y_0$ ಬೆಲೆಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸಿದರೆ, (x_0, y_0) ಅಣಿತಯುಗ್ಮವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ
$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$
ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು

(i) ಸಂಗತ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಜೊತೆಯ ಬೆಲೆಗಳು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವಂತಿರಬೇಕು. ಮತ್ತು

(ii) ಅಸಂಗತ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವ ಯಾವುದೇ x ಮತ್ತು y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಇರಬಾರದು.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) $ax + by = c$ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಚರಾಂಶಗಳು ಮೊದಲ ಘಾತಾಂಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಚರಾಂಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ನೀವು ಉನ್ನತ ವ್ಯಾಸಂಗದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಲಿದ್ದೀರಿ.

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

ಎಂಬ x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಚರಾಂಶವನ್ನಾದರೂ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ a_1, b_1, a_2 ಮತ್ತು b_2 ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಸರಳವಾಗಿ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. ಆಗಿರಬೇಕು.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ, ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತವೆ. (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

(i) ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿರಬಹುದು.

(ii) ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸದಿರಬಹುದು.

(iii) ಅಧಿವ್ಯಾಪಿಸಿರಬಹುದು.

(i) ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. (ii) ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. (iii) ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅನುಗುಣವಾದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು (i) ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ (ii) ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನ ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಾವು ಪರಿಹರಿಸೋಣ.

3.2.1 ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ (Elimination method)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಹೊರಹಾಕುವಂತೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಒಗ್ಗೂಡಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ವರ್ಜಿಸಬಹುದು.

(i) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರತಿ ಪದಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸಬೇಕಾದ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದದ ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

(ii) ನಂತರ, ಫಲಿತ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ ವರ್ಜಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.1

ಬಿಡಿಸಿರಿ : $3x - 5y = -16$, $2x + 5y = 31$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$3x - 5y = -16 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \qquad (2)$$

ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ y ನ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು y ನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ವರ್ಜಿಸಬಹುದು.

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

$$5x = 15 \qquad (3)$$

ಅಂದರೆ, $x = 3$.

ಈಗ, ನಾವು y ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ (1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ $x = 3$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ.

(1) ರಲ್ಲಿ $x = 3$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $3(3) - 5y = -16$

$$\Longrightarrow \quad y = 5.$$

$x = 3$ ಮತ್ತು $y = 5$ ಆದಾಗ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $3(3) - 5(5) = -16$ ಮತ್ತು $2(3) + 5(5) = 31$ ಆಗುತ್ತವೆ. (1) ಮತ್ತು (2) ಸತ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರವು (3, 5) ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಒಂದೇ ಒಂದು ಚರಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (3) ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಹಂತವಾಗಿದೆ. y ಚರಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ಚರಾಂಶ x ನಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣ (3) ನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಚರಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು “ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ” ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.2

11 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 3 ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 50 ಹಾಗೂ 8 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 3 ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 38 ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಒಂದು ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$

$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ, $3x = 12$. ಇದರಿಂದ $x = 4$.

y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, (1) ರಲ್ಲಿ $x = 4$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$11(4) + 3y = 50$. ಅಂದರೆ, $y = 2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯ ಪರಿಹಾರವು $x = 4$ ಮತ್ತು $y = 2$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 4 ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಳಿಸುವ ಸಾಧನದ ಬೆಲೆಯು ₹ 2 ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಲಭ್ಯವಾದ ಬೆಲೆಗಳು ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೃಪ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.3

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ : $3x + 4y = -25$, $2x - 3y = 6$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$3x + 4y = -25 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 6 \quad (2)$$

x ಚರಾಂಶವನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು, ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 2 ರಿಂದ ಮತ್ತು (2) ನ್ನು -3 ರಿಂದ ನಾವು ಗುಣಿಸೋಣ.

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$$

$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, $17y = -68$. ಇದರಿಂದ, $y = -4$

ನಂತರ, (1) ರಲ್ಲಿ $y = -4$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$3x + 4(-4) = -25$$

ಅಂದರೆ, $x = -3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವು $(-3, -4)$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಉದಾಹರಣೆ 3.3 ರಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆ 3.1 ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಂತೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಕೂಡುವುದು ಅಥವಾ ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ x ಅಥವಾ y ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವಂತೆ ನಾವು ಕೆಲವು ನಿರ್ವಹಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ನಂತರ ನಾವು ವರ್ಜಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.4

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಿ : $101x + 99y = 499, \quad 99x + 101y = 501$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$101x + 99y = 499 \quad (1)$$

$$99x + 101y = 501 \quad (2)$$

ಇಲ್ಲಿ ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಾವು ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ x ನ ಸಹಗುಣಕವು ಇನ್ನೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ y ನ ಸಹಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ನಂತರ ಕಳೆಯಬೇಕು.

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ, $200x + 200y = 1000$.

200 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $x + y = 5 \quad (3)$

(1) ರಿಂದ (2) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, $2x - 2y = -2$

$$x - y = -1 \quad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ $x = 2, \; y = 3$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಪರಿಹಾರವು $(2, 3)$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.5

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಿರಿ : $3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$3(2x + y) = 7xy \quad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \quad (2)$$

xy ಪದವು ಇರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲ ಹಾಗೂ $x = 0$ ಆದರೆ, $y = 0$ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(0, 0)$ ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ $x \neq 0$ ಮತ್ತು $y \neq 0$ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x \neq 0, \; y \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳನ್ನು xy ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7, \quad \text{ಅಂದರೆ,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \quad (3)$$

ಮತ್ತು

$$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \quad (4)$$

$a = \frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $b = \frac{1}{y}$ ಆಗಿರಲಿ.

(3) ಮತ್ತು (4) ರ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$3a + 6b = 7 \quad (5)$$

$$9a + 3b = 11 \quad (6)$$

ಇದು a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ.

b ನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು, (6) $\times 2 \implies 18a + 6b = 22$ (7)

(5) ರಿಂದ (7) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, $-15a = -15$. ಅಂದರೆ, $a = 1$.

(5) ರಲ್ಲಿ $a = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $b = \frac{2}{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 1$ ಮತ್ತು $b = \frac{2}{3}$.

$a = 1$ ಆದಾಗ, $\frac{1}{x} = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$.

$b = \frac{2}{3}$ ಆದಾಗ, $\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \frac{3}{2}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $(1, \frac{3}{2})$ ಮತ್ತು $(0, 0)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

ಈಗ, $3(2x + y) = 7xy$ (1)

$3(x + 3y) = 11xy$ (2)

ಈಗ, (2) $\times 2 -$ (1) $\implies 15y = 15xy$

$\implies 15y(1-x) = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$ ಮತ್ತು $y = 0$

$x = 1$ ಆದಾಗ, $y = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $y = 0$ ಆದಾಗ, $x = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳೆಂದರೆ $(1, \frac{3}{2})$ ಮತ್ತು $(0, 0)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಿ.

1. $x + 2y = 7, \quad x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8, \quad 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4, \quad \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy, \quad 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy}, \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy}, x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy, \quad 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70, \quad 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97, \quad 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5}, x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}, \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0, x \neq 0, y \neq 0$

ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳ ಗಣದ ಪ್ರಧಾನತೆ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ಸಹಗುಣಕಗಳು $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

y ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಲು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

ಈಗ, ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು b_2 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು b_1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad (4)$$

ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ (4) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_1c_2 - b_2c_1 \implies x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. ಇಲ್ಲಿ, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

(1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಮತ್ತು y ಗಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿದರೆ,

$y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. ಇಲ್ಲಿ, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \quad (5)$$

ಇಲ್ಲಿ, ನಾವು ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

ಸಂಗತಿ (i) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. ಅಂದರೆ, $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಸಂಗತಿ (ii) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. ಅಂದರೆ, $a_2 \neq 0$ ಮತ್ತು $b_2 \neq 0$ ಆದರೆ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ a_1 ಮತ್ತು b_1 ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\lambda(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \quad (6)$$

$c_1 = \lambda c_2 \implies \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ (6) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ತೃಪ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

$c_1 = \lambda c_2$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (2) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಸಹ ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ ಆದರೆ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$c_1 \neq \lambda c_2$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸೋಣ.

$a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ಆಗಿರುವ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ಅಥವಾ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

3.2.2 ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ (Cross multiplication method)

ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ x ಮತ್ತು y ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ, ನಾವು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ ಎಂದು ಕರೆಯುವ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಈಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಅದು ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ರೊಂದಿಗೆ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಾವು ಪರಿಹರಿಸೋಣ.

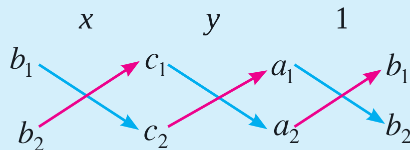
ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಾವು ಬರೆಯೋಣ.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೆನೆಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಳಗಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರವು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಬಹುದು.



ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತು ಅವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಗುಣಲಬ್ಧ (ಮೇಲ್ಮುಖ ಬಾಣ)ವನ್ನು ಮೊದಲ ಗುಣಲಬ್ಧ(ಕೆಳಮುಖ ಬಾಣ)ದಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಮೇಲಿನ ರೂಪದಿಂದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $b_1c_2 - b_2c_1$ ಅಥವಾ $c_1a_2 - c_2a_1$ ಎಂಬವು 0 ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ

(i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಆದರೆ, $x = 0$.

(ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ಆದರೆ, $y = 0$.

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ, ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ನಾವು ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.6

ಬಿಡಿಸಿರಿ : $2x + 7y - 5 = 0$

$-3x + 8y = -11$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು

$$2x + 7y - 5 = 0$$
$$-3x + 8y + 11 = 0$$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನಕ್ಕಾಗಿ, ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

	x		y		1	
7		–5		2		7
8		11		–3		8

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{x}{(7)(11) - (8)(-5)} = \dfrac{y}{(-5)(-3) - (2)(11)} = \dfrac{1}{(2)(8) - (-3)(7)}$.

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{117} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{1}{37}$. ಅಂದರೆ, $x = \dfrac{117}{37}$, $y = -\dfrac{7}{37}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವು $\left(\dfrac{117}{37}, -\dfrac{7}{37}\right)$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.7

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಿ : $3x + 5y = 25$

$7x + 6y = 30$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $3x + 5y - 25 = 0$

$7x + 6y - 30 = 0$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

	x		y		1	
5		–25		3		5
6		–30		7		6

$$\Longrightarrow \frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35}. \quad \text{ಅಂದರೆ, } \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 0$, $y = 5$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವು $(0, 5)$ ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$ ಎಂದರೆ $x = \frac{0}{-17} = 0$ ಎಂಬರ್ಥವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{x}{0}$ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಸಂಕೇತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವಲ್ಲ. ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.8

ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮಿಸಿದಾಗ(ಅದಲು–ಬದಲು) ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 27 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ಎಂಬುದು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ $10x + y$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. (35= 10(3) +5 ಎಂಬಂತೆ)

ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮಿಸಿದಾಗ, x ಎಂಬುದು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಸ್ತರಣಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು $10y + x$ ಆಗಿದೆ.

ಮೊದಲ ನಿಬಂಧನೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $y = 2x$. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2x - y = 0 \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ, ಎರಡನೆಯ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

ಅಂದರೆ, $-9x + 9y = 27 \Longrightarrow -x + y = 3 \qquad (2)$

ಸಮೀಕರಣಗಳು (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, $x = 3$.

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ $x = 3$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $y = 6$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು $(3\times10) + 6 = 36$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.9

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಶವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಛೇದದಿಂದ 3 ನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೆ, $\frac{18}{11}$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಂಶವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಛೇದವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದರೆ $\frac{2}{5}$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{x}{y}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow 11x = 6y - 18 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad 5x + 40 = 4y$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $11x - 6y + 18 = 0$ (1)

$5x - 4y + 40 = 0$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ರೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18;\quad a_2 = 5,\ b_2 = -4,\ c_2 = 40.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

x		y		1	
-6	18		11		-6
-4	40		5		-4

$$\Longrightarrow \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30}$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{168}{14} = 12$; $y = \frac{350}{14} = 25$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{12}{25}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.10

ಎಂಟು ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು ಹನ್ನೆರಡು ಹುಡುಗರು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು 10 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಆರು ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು ಎಂಟು ಹುಡುಗರು 14 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ತಾನೊಬ್ಬನೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ತಾನೊಬ್ಬನೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಬೇಕಾದ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ y ಆಗಿರಲಿ. $x \neq 0$ ಮತ್ತು $y \neq 0$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು $\frac{1}{x}$ ಭಾಗದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ $\frac{1}{y}$ ಭಾಗದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ 8 ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು 12 ಹುಡುಗರು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{1}{10}$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10}$ (1)

ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ 6 ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು 8 ಹುಡುಗರು ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸದ ಪ್ರಮಾಣವು $\frac{1}{14}$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$ (2)

$a = \frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $b = \frac{1}{y}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ (1) ಮತ್ತು (2) ಕ್ರಮವಾಗಿ,

$8a + 12b = \frac{1}{10} \Longrightarrow 4a + 6b - \frac{1}{20} = 0.$ (3)

$6a + 8b = \frac{1}{14} \Longrightarrow 3a + 4b - \frac{1}{28} = 0.$ (4)

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಾಗಿ (3) ಮತ್ತು (4) ರ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ

$$\begin{array}{cccc} a & & b & 1 \\ 6 & -\frac{1}{20} & 4 & 6 \\ 4 & -\frac{1}{28} & 3 & 4 \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{a}{-\dfrac{3}{14}+\dfrac{1}{5}} = \dfrac{b}{-\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{7}} = \dfrac{1}{16-18}$. ಅಂದರೆ, $\dfrac{a}{-\dfrac{1}{70}} = \dfrac{b}{-\dfrac{1}{140}} = \dfrac{1}{-2}$.

ಅಂದರೆ, $a = \dfrac{1}{140}$, $b = \dfrac{1}{280}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \dfrac{1}{a} = 140$, $y = \dfrac{1}{b} = 280$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಬ್ಬ ಗಂಡಸು ತಾನೊಬ್ಬನೇ 140 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ತಾನೊಬ್ಬನೇ 280 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ.
   (i) $3x + 4y = 24$, $20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44$, $0.8x + 0.6y = 0.5$
   (iii) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5y}{3} = -2$, $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{13}{6}$ (iv) $\dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} = -2$, $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 13$
2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯಾಗಿ ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:
   (i) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಕ್ಕಿಂತ 2 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 5 ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯದ ಅನುಪಾತವು 9 : 7 ಮತ್ತು ಅವರ ಖರ್ಚಿನ ಅನುಪಾತವು 4 : 3 ಆಗಿದೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 2000 ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ, ಅವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iii) ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದ ಏಳರಷ್ಟಿದೆ. ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಲೋಮಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 18 ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iv) ಮೂರು ಖುರ್ಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಮೇಜುಗಳ ಬೆಲೆಯು ₹ 700 ಹಾಗೂ ಐದು ಖುರ್ಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಮೇಜುಗಳ ಬೆಲೆಯು ₹ 1100 ಆದರೆ, ಎರಡು ಖುರ್ಚಿಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಮೇಜುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯೇನು?
   (v) ಒಂದು ಆಯತದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವನ್ನು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 28 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉದ್ದವನ್ನು 1ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 33 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (vi) ಒಂದು ರೈಲು ಸ್ಥಿರ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೂರವನ್ನು ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ರೈಲಿನ ವೇಗವನ್ನು 6 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಿದರೆ, ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 4 ಗಂಟೆಗಳ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ರೈಲಿನ ವೇಗವನ್ನು 6 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೆ, ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 6 ಗಂಟೆಗಳ ಅಧಿಕ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ರೈಲು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.3 ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳು (Quadratic polynomials)

x ಚರಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ n ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದವು $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a_0 \neq 0$ ಮತ್ತು $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಘಾತ ಎರಡನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ವರ್ಗ ಬಹುಪದ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$, b ಮತ್ತು c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಘಾತ ಸೊನ್ನೆಯ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2 + x + 1$, $3x^2 - 1$, $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ ಎಂಬವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿವೆ.

$x = k$ ನಲ್ಲಿ $p(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಬೆಲೆಯನ್ನು $p(x)$ ನಲ್ಲಿ x ನ್ನು k ನಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $x = k$ ನಲ್ಲಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಯು $p(k) = ak^2 + bk + c$ ಆಗಿದೆ.

3.3.1 ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು (Zeros of a polynomial)

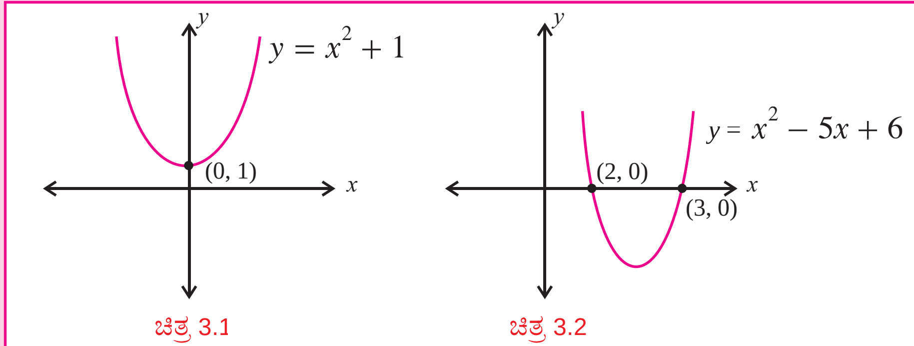
$p(x)$ ಬಹುಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $p(k) = 0$ ಆಗುವಂತೆ k ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, k ಎಂಬುದನ್ನು $p(x)$ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$q(x) = x^2 - 5x + 6$ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $q(2) = 0$ ಮತ್ತು $q(3) = 0$.

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ಬಹುಪದವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $p(x) = x^2 + 1$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ $p(k) = 0$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ k ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದದ ನಕ್ಷೆ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷವು ಛೇದಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 3.1 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 3.2 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 3.1 ಚಿತ್ರ 3.2

3.3.2 ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $x - \alpha$ ಮತ್ತು $x - \beta$ ಗಳು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$, ಇಲ್ಲಿ k ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

ಎರಡೂ ಕಡೆ x^2, x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ ಮತ್ತು $c = k\alpha\beta$.

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ ರ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧಗಳೆಂದರೆ,
>
> **ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ :** $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$.
>
> **ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ :** $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.11

$x^2 + 9x + 20$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = 0 \Longrightarrow (x+4)(x+5) = 0 \therefore x = -4$ ಅಥವಾ $x = -5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(-4) = (-4+4)(-4+5) = 0$ ಮತ್ತು

$p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x)$ ನ ಸೊನ್ನೆಗಳು -4 ಮತ್ತು -5 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -9$ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 20$ (1)

ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ,

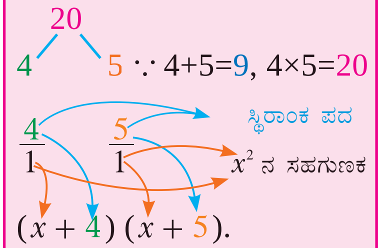
ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\dfrac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\dfrac{9}{1} = -9$ (2)

ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = \dfrac{20}{1} = 20$ (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರಶೀಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$x^2 + 9x + 20$ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.



ಸೂಚನೆ

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದವು ಗರಿಷ್ಠ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಯಾವುದೇ $a \neq 0$ ಗೆ $a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$ ಎಂಬುದು α ಮತ್ತು β ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ a ನ್ನು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ, α ಮತ್ತು β ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.12

ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕ್ರಮವಾಗಿ -4 ಮತ್ತು 3 ಆದರೆ, ಆ ವರ್ಗ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\alpha + \beta = -4$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 3$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆ ರೀತಿಯ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು $p(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

$= x^2 - (-4)x + 3 = x^2 + 4x + 3$

ಉದಾಹರಣೆ 3.13

$x = \frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $x = -1$ ರಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

α ಮತ್ತು β ಗಳು $p(x)$ ನ ಸೊನ್ನೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸಿ,

$$p(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

ಇದು $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು -1 ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ ಅಗತ್ಯವಾದ ಬಹುಪದವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು:

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $p(x)$ ನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದ ಗುಣಲಕ್ಷಣದೊಂದಿಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

$4x^2 + 3x - 1$ ಎಂಬುದು ಕೂಡಾ $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು -1 ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

   (v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

   (v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ (Synthetic division)

29 ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, 4 ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಮತ್ತು 1 ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $29 = 4(7) + 1$.

ಹೀಗೆಯೇ, $p(x)$ = (ಭಾಗಲಬ್ಧ)$q(x)$ + ಶೇಷ ಆಗಿರುವಂತೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಪಡೆಯಲು $p(x)$ ಬಹುಪದವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದ $q(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$. ಇಲ್ಲಿ, $r(x)$ ನ ಘಾತ $<$ $q(x)$ ನ ಘಾತ.

ಇದನ್ನು ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$q(x) = x + a$ ಆದರೆ, $r(x)$ ನ ಘಾತ $= 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $r(x)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = s(x)(x + a) + r$. ಇಲ್ಲಿ r ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

ಮೇಲೆ $x = -a$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $p(-a) = s(-a)(-a + a) + r \implies r = p(-a)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $q(x) = x + a$ ಆದರೆ, $x = -a$ ನಲ್ಲಿ $p(x)$ ನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂ :

$p(x)$ ಎಂಬುದು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎಂಬುದು ಭಾಜಕ ಆದರೆ, ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂನಿಂದ $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ.

(i) $q(x)$ ಎಂಬುದು ರೇಖೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, $r(x) = r$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $q(x)$ ನ ಘಾತ $= 1$ (ಅಂದರೆ, $q(x)$ ಎಂಬುದು ರೇಖೀಯ) ಆದರೆ, $p(x)$ ನ ಘಾತ $= 1 + s(x)$ ನ ಘಾತ.

(iii) $x + a$ ರಿಂದ $p(x)$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಶೇಷವು $p(-a)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) $r = 0$ ಆದರೆ, $q(x)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ತತ್ಸಮಾನವಾಗಿ $q(x)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ಸರಳ(ರೇಖೀಯ) ಬಹುಪದದಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವ ಸುಂದರ ವಿಧಾನವನ್ನು 1809 ರಲ್ಲಿ ಪಾಲೋ ರಫಿನ್‌ರವರು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಇವರ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಒಳಗೊಂಡ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ರೇಖೀಯ ಬಹುಪದದಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಭಾಗಾಹಾರ ಮಾಡಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.



ಪಾಲೋ ರಫಿನ್
(1765-1822, ಇಟಲಿ)

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ ಎಂಬುದು ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು $q(x) = x + 2$ ಎಂಬುದು ಭಾಜಕ ಆಗಿರಲಿ. ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧ $s(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ r ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಹಂತ 1 ಭಾಜ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾಜಕಗಳನ್ನು x ನ ಘಾತಗಳು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ). ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗಿರುವ ಪದಗಳಿಗೆ 0 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

$x^3 + 2x^2 - x - 4$

1 2 –1 –4

ಹಂತ 2 ಭಾಜಕದ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 3 ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ನಮೂದಿಗೆ 0 ನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ನಮೂದುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

–2	1	2	–1	–4	
	0	$1\times(-2)$ → –2	$0\times(-2)$ → 0	$-1\times(-2)$ → 2	
	1+0 = 1	2+(–2) = 0	–1+0 = –1	–4+2 = –2	⟵ ಶೇಷ

ಹಂತ 4 ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಎಲ್ಲಾ ನಮೂದುಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಸಹಗುಣಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^2 - 1$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು –2 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ ನ್ನು $x - 3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$ ಆಗಿರಲಿ. ಭಾಜಕದ ಸೊನ್ನೆಯು 3. ಆದ್ದರಿಂದ,

3	1	1	–7	–3
	0	3	12	15
	1	4	5	12 ⟶ ಶೇಷ

$\therefore$ $p(x)$ ನ್ನು $x - 3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^2 + 4x + 5$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 12 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.15

$2x + 1$ ರಿಂದ $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^3 + ax^2 - bx - 6$ ಆದರೆ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ ಆಗಿರಲಿ.

ಭಾಜಕವು $2x + 1$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $2x + 1 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. ಆಗ $x = -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ ಭಾಜಕದ ಸೊನ್ನೆಯು $-\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ.

$-\frac{1}{2}$	2	1	–14	–19	6
	0	–1	0	7	6
	2	0	–14	–12	12 ⟶ ಶೇಷ

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\{2x^3 - 14x - 12\} + 12$

$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧವು $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) = x^3 - 7x - 6$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 12 ಆಗಿದೆ.

ಆದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^3 + ax^2 - bx - 6$. ಇದನ್ನು ನಾವು ಪಡೆದ ಭಾಗಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ $a = 0$ ಮತ್ತು $b = 7$. ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 0$, $b = 7$ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 12 ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ ನ್ನು $x + 4$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $x^3 - ax^2 + bx + 6$ ಆದರೆ, a, b ಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ ನ್ನು $2x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $4x^3 + px^2 - qx + 3$ ಆದರೆ, p , q ಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.4.1 ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಘನ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

$p(x)$ ಘನ ಬಹುಪದದ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿದರೆ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $p(x)$ ನ ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ವರ್ಗ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವು ಘನ ಬಹುಪದವನ್ನು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಗೆ, $x = a$ ಯು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, $p(a) = 0$.

(ii) $x - a$ ಯು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತವಾದರೆ, $p(a) = 0$. (ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ)

(iii) $x - 1$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, $p(x)$ ನ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) $x + 1$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, ಸ್ಥಿರಾಂಕದೊಂದಿಗೆ x ನ ಸಮ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು x ನ ಬೆಸ ಘಾತಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.16

(i) $x - 1$ ಎಂಬುದು $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ರ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(ii) $x + 1$ ಎಂಬುದು $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ರ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ಆಗಿರಲಿ.

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. (ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 0 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x - 1)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

(ii) $q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ಆಗಿರಲಿ.

$q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 1$ ಎಂಬುದು $q(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.17

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ನ್ನು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $p(1) = -2 \neq 0$ (ಸಹಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

$\therefore$ $(x - 1)$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, $p(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 1$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇತರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಗಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

-1	2	-3	-3	2
	0	-2	5	-2
	2	-5	2	0 $\longrightarrow$ ಶೇಷ

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

ಈಗ, $2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - 4x - x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 2)(2x - 1)$.

ಗಮನಿಸಿ

$2x^2 - 5x + 2$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

4

-4 $\quad -1$ $\quad \because -4+(-1)=-5, \; -4\times(-1)=4$

$\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1}$ $\quad \frac{-1}{2}$ → ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ; x^2 ನ ಸಹಗುಣಕ

$(x - 2)\,(2x - 1)$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.18

ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

ಪರಿಹಾರ $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ ಆಗಿರಲಿ.

$p(1) \neq 0$ ಮತ್ತು $p(-1) \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x+1$ ಮತ್ತು $x-1$ ಎಂಬವು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಯತ್ನ ಮತ್ತು ದೋಷ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ x ನ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗಾಗಿ ನಾವು ಶೋಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

$x = 2$ ಆದಾಗ, $p(2) = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x - 2$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇತರೆ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವು ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

2	1	–3	–10	24	
	0	2	–2	–24	
	1	–1	–12	0	⟶ ಶೇಷ

$\therefore$ ಇನ್ನೊಂದು ಅಪವರ್ತನವು $x^2 - x - 12$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x-4)(x+3)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿರಿ.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.) ಮತ್ತು ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ಲ.ಸಾ.ಅ.)

3.5.1 ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.) (Greatest Common Divisor) (GCD)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ.) ಅಥವಾ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (ಮ.ಸಾ.ಭಾ.)ವು ಅವುಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಸರಳವಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(i) a^4, a^3, a^5, a^6 (ii) a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c

(i) ರಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಭಾಜಕಗಳು a, a^2, a^3 ಆಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ a^3 ಎಂಬುದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಭಾಜಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, a^4, a^3, a^5, a^6 ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ (GCD) ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು a^3 ಆಗಿದೆ.

(ii) ರಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆಯೇ, a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ab^4 ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದ ಸಹಗುಣಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.19

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : (i) 90, 150, 225 (ii) $15x^4y^3z^5$, $12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2-3x-2)$, $8(4x^2+4x+1)$, $12(2x^2+7x+3)$

ಪರಿಹಾರ

(i) 90, 150 ಮತ್ತು 225 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಾವು ಬರೆಯೋಣ.

$90 = 2\times3\times3\times5$, $150 = 2\times3\times5\times5$ ಮತ್ತು $225 = 3\times3\times5\times5$

ಮೇಲಿನವುಗಳಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 3 ಮತ್ತು 5 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $= 3\times5 = 15$

(ii) ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಅದೇ ರೀತಿಯ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ $15x^4y^3z^5$ ಮತ್ತು $12x^2y^7z^2$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕಗಳು 3, x^2, y^3 ಮತ್ತು z^2 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $= 3\times x^2\times y^3\times z^2 = 3x^2y^3z^2$

(iii) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆಂದರೆ, $6(2x^2-3x-2)$, $8(4x^2+4x+1)$, $12(2x^2+7x+3)$.

6, 8, 12 ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. 2 ಆಗಿದೆ.

ವರ್ಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$2x^2-3x-2 = (2x+1)(x-2)$$

$$4x^2+4x+1 = (2x+1)(2x+1)$$

$$2x^2+7x+3 = (2x+1)(x+3)$$

ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು $(2x+1)$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $= 2(2x+1)$.

3.5.2 ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಮನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಹುಪದಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕ (Greatest common divisor of polynomials using division algorithm)

924 ಮತ್ತು 105 ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಒಂದು ಸರಳವಾದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$924 = 8 \times 105 + 84$

$105 = 1 \times 84 + 21$, (ಅಥವಾ)

$84 = 4 \times 21 + 0$,

	8		1		4
105	924	84	105	21	84
	840		84		84
	84		21		0

924 ಮತ್ತು 105 ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು 21 ಆಗಿದೆ.

ಬಹುಪದಗಳು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ ಇದೇ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು.

$(f(x))$ ನ ಘಾತ $\geq (g(x))$ ನ ಘಾತ ಆಗಿರುವಂತೆ $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಲ್ಲದ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿರಲಿ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಿದೆ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳನ್ನು ರೇಖೀಯವಾಗಿ, ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಲಾಗಿದ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿ, ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ನಾವು ಕಲಿತಿರುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಆಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅದು ಕಠಿಣವಾದ ಸಮಸ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನವು ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 1 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ಪಡೆಯಲು ಮೊದಲು $f(x)$ ನ್ನು $g(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $q(x)$ ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬುದು ಶೇಷ. ಆದ್ದರಿಂದ, $(g(x))$ ನ ಘಾತ > $(r(x))$ ನ ಘಾತ. $r(x)$ ಶೇಷವು 0 ಆದರೆ, $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $g(x)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2 $r(x)$ ಶೇಷವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$ ಪಡೆಯಲು $g(x)$ ನ್ನು $r(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $r_1(x)$ ಎಂಬುದು ಶೇಷವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $r(x)$ ನ ಘಾತ > $r_1(x)$ ನ ಘಾತ. $r_1(x)$ ಶೇಷವು 0 ಆದರೆ, $r(x)$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಆಗಿದೆ.

ಹಂತ 3 $r_1(x)$ ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಶೇಷವು 0 ಆಗುವವರೆಗೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ. ಕೊನೆಯ ಹಂತದ ಒಂದು ಹಿಂದಿನ ಹಂತದಲ್ಲಿರುವ ಶೇಷವು $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಆಗಿದೆ. $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.$(f(x), g(x))$ ಅಥವಾ GCD $(f(x), g(x))$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ತತ್ವದ ಮೇಲೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಂ ಆಧಾರಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, GCD (252,105) = GCD (147,105) = GCD(42,105) = GCD(63,42) = GCD(21,42) = 21.

ಉದಾಹರಣೆ 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$ ಮತ್ತು $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$ ಮತ್ತು $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಘಾತ > $g(x)$ ನ ಘಾತ. $\therefore$ ಭಾಜಕವು $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ಆಗಿದೆ.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x+2 \\ \hline x^3+x^2-5x+3 & x^4+3x^3+0x^2-x-3 \\ & x^4+x^3-5x^2+3x \\ \hline & \quad 2x^3+5x^2-4x-3 \\ & \quad 2x^3+2x^2-10x+6 \\ \hline & \qquad 3x^2+6x-9 \\ & \Longrightarrow \quad x^2+2x-3 \longrightarrow \text{ಶೇಷ } (\neq 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x-1 \\ \hline x^2+2x-3 & x^3+x^2-5x+3 \\ & x^3+2x^2-3x \\ \hline & \quad -x^2-2x+3 \\ & \quad -x^2-2x+3 \\ \hline & \quad 0 \longrightarrow \text{ಶೇಷ} \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, GCD $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

ಗಮನಿಸಿ

ಎರಡು ಮೂಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಸರಳವಾದ ಅಪವರ್ತನ(ಸ್ಥಿರಾಂಕ)ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಏನನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು $3x^2 + 6x - 9$ರಿಂದ ಸರಳವಾದ ಅಪವರ್ತನ 3ನ್ನು ಹೊರ ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $x^2 + 2x - 3$ ನ್ನು ಹೊಸ ಭಾಜಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.21

$3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$ ಮತ್ತು $4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x = 3x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$ ಆಗಿರಲಿ.

$g(x) = 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x = 2x(2x^3 + 7x^2 + 4x - 4)$ ಆಗಿರಲಿ.

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ಮತ್ತು $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಭಾಜಕವನ್ನು $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \\
\hline
x^3 + 2x^2 - 4x - 8 & 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \\
 & 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \\
\hline
 & 3x^2 + 12x + 12 \\
 & (x^2 + 4x + 4) \\
 & \text{ಶೇಷ } (\neq 0)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\
 & x^3 + 4x^2 + 4x \\
\hline
 & -2x^2 - 8x - 8 \\
 & -2x^2 - 8x - 8 \\
\hline
 & 0 \longrightarrow \text{ಶೇಷ}
\end{array}
$$

$3x$ ಮತ್ತು $2x$ ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು x ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, GCD $(f(x), g(x)) = x(x^2 + 4x + 4)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.6

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $7x^2yz^4,\ 21x^2y^5z^3$ (ii) $x^2y,\ x^3y,\ x^2y^2$
   (iii) $25bc^4d^3,\ 35b^2c^5,\ 45c^3d$ (iv) $35x^5y^3z^4,\ 49x^2yz^3,\ 14xy^2z^2$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $c^2 - d^2,\ c(c - d)$ (ii) $x^4 - 27a^3x,\ (x - 3a)^2$
   (iii) $m^2 - 3m - 18,\ m^2 + 5m + 6$ (iv) $x^2 + 14x + 33,\ x^3 + 10x^2 - 11x$
   (v) $x^2 + 3xy + 2y^2,\ x^2 + 5xy + 6y^2$ (vi) $2x^2 - x - 1,\ 4x^2 + 8x + 3$
   (vii) $x^2 - x - 2,\ x^2 + x - 6,\ 3x^2 - 13x + 14$ (viii) $x^3 - x^2 + x - 1,\ x^4 - 1$
   (ix) $24(6x^4 - x^3 - 2x^2),\ 20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$
   (x) $(a - 1)^5(a + 3)^2,\ (a - 2)^2(a - 1)^3(a + 3)^4$

3. ಭಾಗಾಹಾರ ಅಲ್ಗಾರಿದಮನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದ ಜೋಡಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ 4x^2 - 16x + 12$
   (ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18,\ 3x^2 + 13x + 10$
   (iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$
   (iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12,\ x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ಲ.ಸಾ.ಅ.) (Least Common Multiple) (LCM)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವು ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಕನಿಷ್ಠ ಘಾತವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, a^4, a^3, a^6 ಸರಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

a^3, a^4 ಮತ್ತು a^6 ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು $a^6, a^7, a^8, \cdots$ ಆಗಿವೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ, ಲಘುತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವು a^6 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, a^4, a^3, a^6 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. a^6 ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, a^3b^4, ab^5, a^2b^7 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. a^3b^7 ಆಗಿದೆ.

ಲ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಇನ್ನೂ ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.22

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 90, 150, 225

(ii) $35a^2c^3b, 42a^3cb^2, 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2, (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3+y^3, x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ,

$$90 = 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1$$
$$150 = 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2$$
$$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2$$

ಗುಣಲಬ್ಧ $2^1\times3^2\times5^2 = 450$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಆಗಿದೆ.

(ii) ಈಗ, 35, 42 ಮತ್ತು 30 ರ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು $5\times7\times6 = 210$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಲ.ಸಾ.ಅ. $= 210\times a^3\times c^3\times b^3 = 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2, (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$ ರ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು $(a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$ ಆಗಿದೆ.

(iv) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಲ.ಸಾ.ಅ. $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6-y^6.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.7

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $x^3y^2,\ xyz$
2. $3x^2yz,\ 4x^3y^3$
3. $a^2bc,\ b^2ca,\ c^2ab$
4. $66a^4b^2c^3,\ 44a^3b^4c^2,\ 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$
6. $x^2y+xy^2,\ x^2+xy$
7. $3(a-1),\ 2(a-1)^2,\ (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2,\ 5x^2y+15xy^2,\ x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3,\ (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2),\ 12(3x^2-5xy-2y^2),\ 14(6x^4+2x^3)$.

3.5.4 ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ (Relation between LCM and GCD)

ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $21 \times 35 = 105 \times 7$. ಇಲ್ಲಿ, LCM (21,35) =105 ಮತ್ತು GCD (21,35) = 7. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ:

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $f(x)\times g(x)$ = **LCM ($f(x)$, $g(x)$) $\times$ GCD ($f(x)$, $g(x)$).**

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದಿಗೆ ನಾವು ಸಮರ್ಥಿಸೋಣ.

$f(x) = 12(x^4 - x^3)$ ಮತ್ತು $g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ ಎಂಬವು ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$f(x) = 12(x^4 - x^3) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1) \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ, $$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2) \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$\text{LCM } (f(x), g(x)) = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1) \times (x-2) = 24x^3(x-1)(x-2)$$

$$\text{GCD } (f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\text{LCM} \times \text{GCD} = 24x^3(x-1)(x-2) \times 4x^2(x-1)$$
$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (3)$$

ಹಾಗೂ, $$f(x) \times g(x) = 12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)$$
$$= 96x^5(x-1)^2(x-2) \qquad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, $\text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. $f(x)$, $g(x)$ ಹಾಗೂ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಯಿಲ್ಲದೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ -1 ರ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳು ಏಕೈಕ(ಅನನ್ಯ)ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.23

$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ ಮತ್ತು $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x^2 + 5x + 7$ ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 26x + 56$ ಮತ್ತು $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28$ ಆಗಿರಲಿ.

GCD = $x^2 + 5x + 7$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ, $\text{GCD} \times \text{LCM} = f(x) \times g(x)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\text{LCM} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{GCD}} \qquad (1)$$

$f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳೆರಡನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

$f(x)$ ನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ನಾವು ಭಾಗಿಸೋಣ.

	1	−2	8		
1 5 7	1	3	5	26	56
	1	5	7		
		−2	−2	26	
		−2	−10	−14	
			8	40	56
			8	40	56
				0	

$f(x)$ ನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $x^2 - 2x + 8$ ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, (1) $\Longrightarrow$ $\quad \text{LCM} = (x^2 - 2x + 8) \times g(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad \text{LCM} = (x^2 - 2x + 8)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 28)$.

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಪಡೆಯಲು $g(x)$ ನ್ನು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ನಂತರ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು $f(x)$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.24

ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $x + 1$ ಮತ್ತು $x^6 - 1$ ಆಗಿವೆ. ಒಂದು ಬಹುಪದವು $x^3 + 1$ ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\quad \text{GCD} = x + 1$ ಮತ್ತು $\text{LCM} = x^6 - 1$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$f(x) = x^3 + 1$ ಆಗಿರಲಿ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ $\quad \text{LCM} \times \text{GCD} = f(x) \times g(x)$

$$\Longrightarrow g(x) = \frac{\text{LCM} \times \text{GCD}}{f(x)} = \frac{(x^6 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)}{x^3 + 1} = (x^3 - 1)(x + 1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $g(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.8

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದ ಜೋಡಿಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x - 2$.
   (ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x^2 + x + 1$.
   (iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35,\ x^3 + 8x^2 + 4x - 21$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು $x + 7$.
   (iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5,\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ. $2x - 1$.

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲ.ಸಾ.ಅ., ಮ.ಸಾ.ಭಾ. ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಹುಪದ $p(x)$ ನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದ $q(x)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(x + 1)^2(x + 2)^2,\ (x + 1)(x + 2),\ (x + 1)^2(x + 2)$.
   (ii) $(4x + 5)^3(3x - 7)^3,\ (4x + 5)(3x - 7)^2,\ (4x + 5)^3(3x - 7)^2$.
   (iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4),\ x^2 - y^2,\ x^4 - y^4$.
   (iv) $(x^3 - 4x)(5x + 1),\ (5x^2 + x),\ (5x^3 - 9x^2 - 2x)$.
   (v) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 3),\ (x - 1),\ (x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$.
   (vi) $2(x + 1)(x^2 - 4),\ (x + 1),\ (x + 1)(x - 2)$.

3.6 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು (Rational expressions)

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು m ಮತ್ತು $n \neq 0$ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ $\frac{m}{n}$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು $p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $q(x)$ ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

$p(x)$ ನ್ನು $\frac{p(x)}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $p(x)$ ಬಹುಪದವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಬಹುಪದ ಆಗಿರಲೇಬೇಕಾದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{x}{x^2+1}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಬಹುಪದವಲ್ಲ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ, $2x+7$, $\frac{3x+2}{x^2+x+1}$, $\frac{x^3+\sqrt{2}x+5}{x^2+x-\sqrt{3}}$.

3.6.1 ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು (Rational expressions in lowest form)

$p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು 1 ಆಗಿರುವಂತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $\frac{p(x)}{q(x)}$ ಎಂಬುದು ಕನಿಷ್ಠ ಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಪದಗಳಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $p(x)$ ಮತ್ತು $q(x)$ ನ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ದಿಂದ ಅಂಶ $p(x)$ ಮತ್ತು ಛೇದ $q(x)$ ಗಳೆರಡನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಇದರ ಕನಿಷ್ಠ ಪದಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.25

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಗಳಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ.

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$

(iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

ಪರಿಹಾರ

(i) ಈಗ, $\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$

(ii) ಈಗ, $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x) = 6x^2-5x+1 = (2x-1)(3x-1)$ ಮತ್ತು

$q(x) = 9x^2+12x-5 = (3x+5)(3x-1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$ ಮತ್ತು

$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.9

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಗಳಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

(i) $\dfrac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (ಸುಳಿವು: $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$)

(vi) $\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\dfrac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\dfrac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\dfrac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ (Multiplication and division of rational expressions)

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$; $q(x)\neq 0$ ಮತ್ತು $\dfrac{g(x)}{h(x)}$; $h(x)\neq 0$ ಎಂಬವು ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ,

(i) ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{g(x)}{h(x)}$ ನ್ನು $\dfrac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಅವುಗಳ ಭಾಗಾಹಾರ $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)}$ ನ್ನು $\dfrac{p(x)}{q(x)}\times\dfrac{h(x)}{g(x)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{p(x)}{q(x)}\div\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$

ಉದಾಹರಣೆ 3.26

(i) $\dfrac{x^3y^2}{9z^4}$ ನ್ನು $\dfrac{27z^5}{x^4y^2}$ ರಿಂದ (ii) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ ನ್ನು $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ ರಿಂದ (iii) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ ನ್ನು $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $$\frac{x^3y^2}{9z^4}\times\frac{27z^5}{x^4y^2}=\frac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)}=\frac{3z}{x}.$$

(ii) $$\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}=a^2-ab+b^2.$$

(iii) $$\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}=\frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$$
$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}=x+4.$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.27

(i) $\dfrac{4x-4}{x^2-1}$ ನ್ನು $\dfrac{x-1}{x+1}$ ರಿಂದ (ii) $\dfrac{x^3-1}{x+3}$ ನ್ನು $\dfrac{x^2+x+1}{3x+9}$ ರಿಂದ (iii) $\dfrac{x^2-1}{x^2-25}$ ನ್ನು $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

(i) $\frac{4x-4}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x+1} = \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{4}{x-1}$.

(ii) $\frac{x^3-1}{x+3} \div \frac{x^2+x+1}{3x+9} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \frac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1)$.

(iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.10

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{x^2-2x}{x+2} \times \frac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\frac{x^2-81}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-20} \times \frac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\frac{x^2-16}{x^2-3x+2} \times \frac{x^2-4}{x^3+64} \times \frac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2} \times \frac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\frac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \frac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \frac{x+3}{x^2-2x}$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\frac{x^2-36}{x^2-49} \div \frac{x+6}{x+7}$

(iii) $\frac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\frac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \frac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \frac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \frac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \frac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ (Addition and subtraction of rational expressions)

$q(x) \neq 0$ ಮತ್ತು $s(x) \neq 0$ ಗಳೊಂದಿಗೆ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ಮತ್ತು $\frac{r(x)}{s(x)}$ ಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ, ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ(ವ್ಯವಕಲನ)ವನ್ನು $\frac{p(x)}{q(x)} \pm \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.28

ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ. (i) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$ (iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

ಪರಿಹಾರ

(i) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$

(ii) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$

$$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$

$$= \frac{x+2}{x+3}+\frac{x+6}{x+3} = \frac{x+2+x+6}{x+3} = \frac{2x+8}{x+3}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.29

$\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\dfrac{x^3-1}{x^2+2}$ ಕ್ಕೆ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು?

ಪರಿಹಾರ $p(x)$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿರಲಿ.

$\dfrac{x^3-1}{x^2+2}+p(x) = \dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2} - \frac{x^3-1}{x^2+2}$$

$$= \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.30

$\left(\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+1}\right)+\dfrac{x+2}{x+1}$ ನ್ನು ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $\left(\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{2x+1}\right)+\dfrac{x+2}{x+1}$

$$= \left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1} = \frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)} = \frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.11

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

   (i) $\dfrac{x^3}{x-2}+\dfrac{8}{2-x}$ (ii) $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

   (iii) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}+\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$ (iv) $\dfrac{x-2}{x^2-7x+10}+\dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}-\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\frac{x^2-4}{x^2+6x+8}-\frac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\frac{2x+5}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]-\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)$ (viii) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}-\frac{2}{x^2+4x+3}$.

2. $\frac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ ಕ್ಕೆ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು?

3. $2x^2-5x+1$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\frac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ ರಿಂದ ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು?

4. $P=\frac{x}{x+y}$, $Q=\frac{y}{x+y}$ ಆದರೆ, $\frac{1}{P-Q}-\frac{2Q}{P^2-Q^2}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.7 ವರ್ಗಮೂಲ (Square root)

$a \in \mathbb{R}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. a ನ ವರ್ಗಮೂಲವು $b^2=a$ ಆಗುವಂತಹ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ b ಆಗಿದೆ. a ನ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು $\sqrt[2]{a}$ ಅಥವಾ $\sqrt{a}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. $(-3)^2=9$ ಮತ್ತು $(+3)^2=9$ ಗಳೆರಡೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $\sqrt{}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{9}=3$. ಹೀಗೆಯೇ, $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{10000}=100$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಬೀಜೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ವರ್ಗವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಬಹುಪದಗಳ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ,

$\sqrt{(p(x))^2}=|p(x)|$, ಇಲ್ಲಿ $|p(x)|=\begin{cases} p(x), & p(x)\geq 0 \text{ ಆದರೆ} \\ -p(x), & p(x)<0 \text{ ಆದರೆ} \end{cases}$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$\sqrt{(x-a)^2}=|(x-a)|$ ಮತ್ತು $\sqrt{(a-b)^2}=|(a-b)|$.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳು ತುಂಬಾ ಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ. (i) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನ (ii) ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಮತ್ತು ಬಹುಪದಗಳೆರಡನ್ನೂ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದಾಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

3.7.1 ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲ (Square root by factorization method)

ಉದಾಹರಣೆ 3.31

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$ (ii) $\frac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2-24xy$

ಪರಿಹಾರ

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}}=11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\frac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}}=\left|\frac{9x^2y^3z^4}{8w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2-24xy}=\sqrt{4x^2+12xy+9y^2-24xy}=\sqrt{(2x-3y)^2}$

$=|(2x-3y)|$

ಉದಾಹರಣೆ 3.32

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \frac{1}{x^6} - 2$
(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

ಪರಿಹಾರ

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\right|$

(iii) ಮೊದಲು, ನಾವು ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸೋಣ.

$6x^2 - x - 2 = (2x+1)(3x-2)$; $3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1)$ ಮತ್ತು
$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

ಈಗ, $\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$= \sqrt{(2x+1)(3x-2)\times(3x-2)(x-1)\times(x-1)(2x+1)}$

$= \sqrt{(2x+1)^2(3x-2)^2(x-1)^2} = |(2x+1)(3x-2)(x-1)|$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.12

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a-b)^4(b-c)^6$ (iii) $(x+11)^2 - 44x$

(iv) $(x-y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\frac{64(a+b)^4(x-y)^8(b-c)^6}{25(x+y)^4(a-b)^6(b+c)^{10}}$

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (Finding the square root of a polynomial by division method)

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸರಳೀಕರಿಸಲಾಗದ ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಬಹುಪದಗಳು ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ ಭಾಗಾಕಾರ ವಿಧಾನವು ಪ್ರಶಸ್ತವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

(i) $\sqrt{66564}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5\ \ 8 \\ \hline 2 & 6\ \ 65\ \ 64 \\ & 4 \\ \hline 45 & \ \ 2\ \ 65 \\ & \ \ 2\ \ 25 \\ \hline 508 & \ \ \ \ 40\ \ 64 \\ & \ \ \ \ 40\ \ 64 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\ & 9x^4 \\ \hline 6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\ & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline 6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\ & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{66564} = 258$ ಮತ್ತು $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$.

ಗಮನಿಸಿ

(i) ಬಹುಪದವನ್ನು x ನ ಘಾತಗಳ **ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ** ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳಿಗೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(ii) ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಸೂಕ್ತವಾದ a, b ಮತ್ತು c ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c \\ &= (3x^2)^2 + (6x^2+2x)(2x) + (6x^2+4x+1)(1)\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$. ಇಲ್ಲಿ $a = 3x^2, b = 2x, c = 1$.

ಪರ್ಯಾಯ : ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಮೊದಲು $9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$
$= (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$
ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ. ನಂತರ ಸೂಕ್ತವಾದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ m, n, l ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾಗಿವೆ.

$$25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4$$
$$= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2$$
$$= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2$$
$$= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c$$
$$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$$
$$= (a - b + c)^2. \quad \text{ಇಲ್ಲಿ, } a = 5x^2,\ b = 3x,\ c = 2$$

$\therefore \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದವು ಈಗಾಗಲೇ x ನ ಘಾತದ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದೆ.

	$x^2 - 5x + 6$
x^2	$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$
	x^4
$2x^2 - 5x$	$-10x^3 + 37x^2$
	$-10x^3 + 25x^2$
$2x^2 - 10x + 6$	$12x^2 - 60x + 36$
	$12x^2 - 60x + 36$
	0

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$.

ಉದಾಹರಣೆ 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಹುಪದವನ್ನು x ನ ಘಾತದ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ನಂತರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

	$5 - 3x + x^2$
5	$25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4$
	25
$10 - 3x$	$-30x + 19x^2$
	$-30x + 9x^2$
$10 - 6x + x^2$	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	0

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದದ ವರ್ಗಮೂಲವು $|x^2 - 3x + 5|$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾದರೆ, m ಮತ್ತು n ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಹುಪದವನ್ನು x ನ ಘಾತದ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಯೋಜಿಸಿರಿ.

$$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m.$$

	$3x^2 + 2x + 4$
$3x^2$	$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m$
	$9x^4$
$6x^2 + 2x$	$12x^3 + 28x^2$
	$12x^3 + 4x^2$
$6x^2 + 4x + 4$	$24x^2 - nx + m$
	$24x^2 + 16x + 16$
	0

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $n = -16$ ಮತ್ತು $m = 16$ ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.13

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಹಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$
2. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಗಳು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಾದರೆ, a ಮತ್ತು b ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$
   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Quadratic equations)

ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಒಂದು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು. ಇದನ್ನು ದಿನನಿತ್ಯ ಬಳಕೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದ ಯಶಸ್ಸು ಪುರಾತನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಸಲ್ಲಬೇಕು. $ax^2 + bx = c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ (ಕ್ರಿ.ಶ. 598 - 665) ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡಿದರು. ನಂತರ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಶ್ರೀಧರ್ ಆಚಾರ್ಯ (ಕ್ರಿ.ಶ.1025) ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿದರು. ಈಗ ಇದನ್ನು (ಭಾಸ್ಕರ II ನಮೂದಿಸಿರುವಂತೆ) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಹಲವಾರು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ನಾವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಅನ್ವಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ನೋಡಲಿದ್ದೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

x ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, a, b, c ಎಂಬವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.

$p(x)$ ಎಂಬುದು 2 ರ ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದವಾದರೆ, $p(x) = 0$ ರೂಪದ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಆದರ್ಶ ರೂಪವು $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $1 - x + x^2 = 0$ ಎಂಬವು ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗಿವೆ.

3.8.1 ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (Solution of a quadratic equation by factorization method)

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೇಖೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಾಗ, ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಅಪವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಂಪೂರ್ಣ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೆಲವು ಅಪವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಅಪವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಸುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.36

ಬಿಡಿಸಿರಿ. $6x^2 - 5x - 25 = 0$

ಪರಿಹಾರ $6x^2 - 5x - 25 = 0$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲು, $\alpha + \beta = -5$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = 6 \times(-25) = -150$ ಆಗಿರುವಂತೆ α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ -5 ಎಂಬುದು x ನ ಸಹಗುಣಕ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\alpha = -15$ ಮತ್ತು $\beta = 10$.

$$6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$$
$$= (2x-5)(3x+5).$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x - 5 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 5 = 0$ ರಿಂದ ಪರಿಹಾರ ಗಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{5}{3}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.37

ಬಿಡಿಸಿರಿ. $\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ, ನಾವು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದ $x = 4$ ಮತ್ತು $x = -4$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{-4, 4\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.38

ಬಿಡಿಸಿರಿ. $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x,\ 3 - 4x > 0$

ಪರಿಹಾರ $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ, $24 - 10x = (3 - 4x)^2$

$$\Longrightarrow \ 16x^2 - 14x - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow \ 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (8x+5)(2x-3)=0. \quad \text{ಇದರಿಂದ,} \quad x=\frac{3}{2} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad -\frac{5}{8}.$$

$x=\frac{3}{2}$ ಆದಾಗ, $3-4x=3-4\left(\frac{3}{2}\right)<0$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $x=\frac{3}{2}$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ.

$x=-\frac{5}{8}$, $3-4x>0$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಮೇಲಿನಂತಿರುವ ಕರಣೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, **ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣ**ದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಅವಲಂಬಿತವಾಗುತ್ತೇವೆ.

$a=b \Longrightarrow a^2=b^2$. ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿ, ಈ ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣದ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಹಾರಗಳು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x=5$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ $x^2=25$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು $x=5$ ಮತ್ತು $x=-5$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, $x=-5$ ಎಂಬುದು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಪರಿಹಾರವನ್ನು **ಅನ್ಯ** ಪರಿಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯು ಕರಣಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಅಂತಿಮ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಖಂಡಿತವಾದುದಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವು ಕಳೆದುಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲ್ಲದ ಹೊಸ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.14

ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $(2x+3)^2-81=0$ (ii) $3x^2-5x-12=0$ (iii) $\sqrt{5}\,x^2+2x-3\sqrt{5}=0$

(iv) $3(x^2-6)=x(x+7)-3$ (v) $3x-\frac{8}{x}=2$ (vi) $x+\frac{1}{x}=\frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2-(a^2+b^2)x+1=0$

(ix) $2(x+1)^2-5(x+1)=12$ (x) $3(x-4)^2-5(x-4)=12$

3.8.2 ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (Solution of a quadratic equation by completing square)

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ರಿಂದ, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ಎಂಬ ಕೊನೆಯ ಪದವು x ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, x^2+bx ಎಂಬ ಪದವು $x+\frac{b}{2}$ ನ ವರ್ಗವಾಗಿರಲು $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಮಾತ್ರ ಹಿಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು x^2+bx ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗೆ ಕೂಡಿದರೆ, ಫಲಿತಾಂಶವು ದ್ವಿಪದದ ವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1 x^2 ನ ಸಹಗುಣಕವು 1 ಆದರೆ, 2 ನೇ ಹಂತಕ್ಕೆ ಹೋಗಿರಿ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು x^2 ನ ಸಹಗುಣಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ. ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 2 x ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು, ವರ್ಗಮೂಲದ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

$$x^2=t \Longrightarrow x=\sqrt{t} \text{ ಅಥವಾ } x=-\sqrt{t}. \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } t \text{ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲ.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3.39

ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ಆಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0 \quad \text{(ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ)}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5} \quad \text{(} x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕದ ಅರ್ಧವು } \frac{3}{5} \text{ ಆಗಿದೆ)}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \quad \text{(ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ } \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \text{ ಕೂಡಿರಿ)}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} \quad \text{(ಎರಡೂ ಕಡೆಯಲ್ಲೂ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{\frac{3 + \sqrt{19}}{5}, \frac{3 - \sqrt{19}}{5}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.40

ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $a = 0$ ಆದರೆ, ಸಾಧಿಸಲು ಏನೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. $a \neq 0$ ಗೆ,

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

3.8.3 ಸೂತ್ರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ (Solution of quadratic equation by formula method)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

ಅಂದರೆ, $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (1)$$

ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$ ಆಗಿದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.41

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $x+1\neq 0$, $x+2\neq 0$ ಮತ್ತು $x+4\neq 0$.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅಂದರೆ, $$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$x^2+6x+8 = 2x^2+2x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2-4x-8=0$. ಇದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

(ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲ.ಸಾ.ಅ. ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು)

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು,

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{48}}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2+2\sqrt{3}$ ಅಥವಾ $2-2\sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{2-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3}\}$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.15

1. ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^2+6x-7=0$ (ii) $x^2+3x+1=0$

(iii) $2x^2+5x-3=0$ (iv) $4x^2+4bx-(a^2-b^2)=0$

(v) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$ (vi) $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$

2. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರ (Solution of problems involving quadratic equations)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಪದಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಹರಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನಂತರ ಪರಿಹರಿಸಬೇಕು. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನಾವು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 3.42

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವು $5\frac{1}{5}$ ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ x ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಇದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವು $\frac{1}{x}$ ಆಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ, $x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $5x^2 - 26x + 5 = 0$

$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$

ಅಂದರೆ, $(5x-1)(x-5) = 0 \implies x = 5$ ಅಥವಾ $\frac{1}{5}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5, $\frac{1}{5}$ ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.43

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು ಅದರ ಎತ್ತರ(ಔನ್ನತ್ಯ)ಕ್ಕಿಂತ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 48 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಪಾದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು x ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು $(x+4)$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$ (ಪಾದ) $\times$ (ಎತ್ತರ)

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯಿಂದ, $\frac{1}{2}(x+4)(x) = 48$

$\implies x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x+12)(x-8) = 0$

$\implies x = -12$ ಅಥವಾ 8

ಆದರೆ, $x = -12$ ಎಂಬುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಉದ್ದವು ಧನಾತ್ಮಕ ಆಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 8$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $x + 4 = 12$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.44

ಒಂದು ಕಾರು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 30 ನಿಮಿಷಗಳು ತಡವಾಗಿ ಹೊರಟಿತು. ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ 150 ಕಿ.ಮೀ.ಗಳ ದೂರವನ್ನು ತಲುಪಲು, ಅದು ತನ್ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ 25 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಂಡಿತು. ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕಾರಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗವು x ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಂಡ ನಂತರ ಕಾರಿನ ವೇಗವು $(x+25)$ ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಆಗಿದೆ.

ಒಟ್ಟು ದೂರ = 150 ಕಿ.ಮೀ.; ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ = $\frac{\text{ದೂರ}}{\text{ವೇಗ}}$

ನಿಗದಿತ ಸಮಯ ಮತ್ತು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದ ಸಮಯ(ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಂತೆ)ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಕಾರು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವು ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ T_1 ಮತ್ತು T_2 ಆಗಿರಲಿ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ, $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ (30 ನಿಮಿಷಗಳು = $\frac{1}{2}$ ಗಂಟೆ)

$$\Longrightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+100)(x-75) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 75$ ಅಥವಾ -100, ಆದರೆ $x = -100$ ಎಂಬುದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗದ ಬೆಲೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಾರಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೇಗವು 75 ಕಿ.ಮೀ./ಗ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.16

1. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಮೊತ್ತವು $\frac{65}{8}$ ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಎರಡು ಧನಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 45 ಆಗಿದೆ. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಬ್ಬ ರೈತನು 100 ಚ.ಮೀ. ಆಯತಾಕಾರದ ತರಕಾರಿಯ ತೋಟವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲು ಬಯಸಿದನು. ಈತನು ಕೇವಲ 30 ಮೀ. ಮುಳ್ಳುತಂತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, ಅವನ ಮನೆಯ ಸುತ್ತು ಗೋಡೆಯನ್ನೇ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಬಾಹುವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಆಯತಾಕಾರದ ತೋಟದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿದನು. ತೋಟದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಮೈದಾನವು 20 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 14 ಮೀ. ಅಗಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದೇ ಅಗಲವುಳ್ಳ 111 ಚ.ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಹಾದಿ ಇದೆ. ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಹಾದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ರೈಲು ಏಕರೂಪ ವೇಗದಲ್ಲಿ 90ಕಿ.ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ವೇಗವನ್ನು 15ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಇದು 30 ನಿಮಿಷಗಳ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ರೈಲಿನ ಮೂಲ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ತಟಸ್ಥವಾಗಿರುವ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೋಣಿಯ ವೇಗವು 15ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಆಗಿದೆ. ಇದು ನದಿಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ 30ಕಿ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿ ನಂತರ ಮೂಲ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ 4ಗಂಟೆ 30ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿರುಗಿ ಬರುತ್ತದೆ. ನದಿಯ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ವರ್ಷದ ಹಿಂದೆ, ಒಬ್ಬನ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎಂಟರಷ್ಟಿತ್ತು. ಈಗ ಅವನ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಚದುರಂಗ ಹಲಗೆಯು 64 ಸಮನಾದ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 6.25 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಹಲಗೆಯ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಅಂಚು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಚದುರಂಗ ಹಲಗೆಯ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು B ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲಕ್ಕಿಂತ 6 ದಿನಗಳ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲವನ್ನು A ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. A ಮತ್ತು B ಇಬ್ಬರು ಒಟ್ಟಿಗೆ 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, B ಒಬ್ಬನೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ರೈಲ್ವೆ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಎರಡು ರೈಲುಗಳು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹೊರಟವು. ಮೊದಲ ರೈಲು ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ರೈಲು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿದವು. ಮೊದಲ ರೈಲು ಎರಡನೇ ರೈಲಿಗಿಂತ 5 ಕಿ.ಮೀ./ಗ. ವೇಗವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಅವುಗಳು 50 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತೀ ರೈಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.8.5 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ (Nature of roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಆಗಿವೆ.

$b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ, $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣವು $x = \frac{-b}{2a}$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರವಾಗಿ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವು $b^2 - 4ac$ ಯ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. $b^2 - 4ac$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯು $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಶೋಧಿಸುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ **ಶೋಧಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\triangle$ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$	ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ
$\triangle > 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮ
$\triangle = 0$	ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ
$\triangle < 0$	ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ (ಸಂಮಿಶ್ರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.)

ಉದಾಹರಣೆ 3.45

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

ಪರಿಹಾರ $ax^2 + bx + c = 0$ ಗೆ ಶೋಧಕ, $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) ಇಲ್ಲಿ, $a = 1; b = -11$ ಮತ್ತು $c = -10$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle > 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮವಾಗಿವೆ.

(ii) ಇಲ್ಲಿ, $a = 4, b = -28$ ಮತ್ತು $c = 49$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$

$\triangle = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮವಾಗಿವೆ.

(iii) ಇಲ್ಲಿ, $a = 2, b = 5$ ಮತ್ತು $c = 5$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (5)^2 - 4(2)(5)$

$= 25 - 40 = -15$

$\triangle < 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.46

ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b ಹಾಗೂ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ c ಗೆ $(a-b+c)x^2 + 2(a-b)x + (a-b-c) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $Ax^2 + Bx + C = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ,

$A = a-b+c$, $B = 2(a-b)$ ಮತ್ತು $C = a-b-c$.

$Ax^2 + Bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕವು

$$B^2 - 4AC = [2(a-b)]^2 - 4(a-b+c)(a-b-c)$$

$$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)+c][(a-b)-c]$$

$$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)^2 - c^2]$$

$\triangle = 4(a-b)^2 - 4(a-b)^2 + 4c^2 = 4c^2$, ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle > 0$ ಮತ್ತು ಇದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.47

$x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - 2x(1+3k) + 7(3+2k) = 0$. (1)

(1) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $a = 1$, $b = -2(3k+1)$, $c = 7(3+2k)$.

ಶೋಧಕ $\triangle = b^2 - 4ac$

$= (-2(3k+1))^2 - 4(1)(7)(3+2k)$

$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3+2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$

ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle = 0$.

$$\Longrightarrow \quad 9k^2 - 8k - 20 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (k-2)(9k+10) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $k = 2, -\frac{10}{9}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.17

1. ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

   (i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

   (iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

   (v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

   (iii) $x^2 + 2k(x - 2) + 5 = 0$ (iv) $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಅವಾಸ್ತವ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $(a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$, ಇಲ್ಲಿ $ad - bc \neq 0$, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮವಾದರೆ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು $a = b = c$ ಆಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅವು ಸಮವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮವಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $c^2 = a^2(1 + m^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3.8.6 ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ (Relations between roots and coefficients of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ a, b, c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ಆಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ,
$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$$

ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ,
$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$
$$= \frac{c}{a} = \frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β ಆದರೆ,

(i) ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

α ಮತ್ತು β ಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ $(x - \alpha)$ ಮತ್ತು $(x - \beta)$ ಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

$\therefore \quad (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

ಅಂದರೆ, x^2 − (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) x + (ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) = 0

ಸೂಚನೆ ಒಂದೇ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.48

$3x^2 - 10x + k = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $\frac{1}{3}$ ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲ ಮತ್ತು k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $3x^2 - 10x + k = 0$ ಆಗಿದೆ.

α ಮತ್ತು β ಗಳು ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$ (1)

(1) ರಲ್ಲಿ $\alpha = \frac{1}{3}$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\beta = 3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೂ, $\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow \quad k = 3$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವು $\beta = 3$ ಮತ್ತು k ನ ಬೆಲೆಯು $k = 3$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.49

$ax^2 - 5x + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆರಡೂ 10 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, a ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 - 5x + c = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $\frac{5}{a} = 10, \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, $\frac{c}{a} = 10$

$\Longrightarrow \quad c = 10a = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $c = 5$

ಸೂಚನೆ

$ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2 - \beta^2$ ಇತ್ಯಾದಿ ರೀತಿಯ α ಮತ್ತು β ಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹಲವಾರು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು $\alpha + \beta$ ಮತ್ತು $\alpha\beta$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೌಲ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಬರೆಯೋಣ.

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}]$, $\alpha \geq \beta$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

ಉದಾಹರಣೆ 3.50

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha > \beta$ ಆದಾಗ $\alpha - \beta$ (iv) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬಂತೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಆಗ, $a = 2, b = -3, c = -1$. ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{13}{4} \times (-2) = -\frac{13}{2}$

(iii) $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4} + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

(iv) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\frac{27}{8}+\frac{9}{4}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)=\frac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(vi) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=\left(\frac{13}{4}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{169}{16}-\frac{1}{2}\right)=\frac{161}{16}.$$

(vii) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}=\left(\frac{161}{16}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)=-\frac{161}{8}.$

ಉದಾಹರಣೆ 3.51

$7+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $7-\sqrt{3}$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳು $7+\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $7-\sqrt{3}$ ಆಗಿವೆ.

$\therefore$ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $=7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3}=14.$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $=(7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3})=(7)^2-(\sqrt{3})^2=49-3=46.$

ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವು x^2- (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) $x+$ (ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) $=0$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2-14x+46=0$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3.52

$3x^2-4x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆದರೆ, $\frac{\alpha^2}{\beta}$ ಮತ್ತು $\frac{\beta^2}{\alpha}$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $3x^2-4x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\alpha+\beta=\frac{4}{3},\qquad \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕಾಗಿ,

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{28}{9}$$

ಹಾಗೂ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $=\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)=\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2-\frac{28}{9}x+\frac{1}{3}=0$ ಅಥವಾ $9x^2-28x+3=0$ ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.18

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$
   (iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$
2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
   (i) 3 , 4 (ii) $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ (iii) $\frac{4+\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2}$
3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$
4. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, $\alpha^2 + \beta^2$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, α^2 ಮತ್ತು β^2 ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, $-\alpha$ ಮತ್ತು $-\beta$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
7. $x^2 - 3x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, $\frac{1}{\alpha^2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{\beta^2}$ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta,\ 2\beta + \alpha$
9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು ಇನ್ನೊಂದರ ವರ್ಗವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. $5x^2 - px + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಹಾಗೂ $\alpha - \beta = 1$ ಆದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.19

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. $6x - 2y = 3, kx - y = 2$ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ
   (A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$
2. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅಸಂಗತವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು
   (A) ಐಕ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. (B) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸಬೇಕು.
   (C) ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಾರದು. (D) x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಬೇಕು.
3. $x - 4y = 8 , 3x - 12y = 24$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು
   (A) ಅಪರಿಮಿತವಾದ ಹಲವಾರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
   (B) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. (C) ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
   (D) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಹೊಂದಿಲ್ಲದೆಯೂ ಇರಬಹುದು.

4. $p(x)=(k+4)x^2+13x+3k$ ಬಹುಪದದ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಯು ಇನ್ನೊಂದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ ಬಹುಪದದ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 3 (B) 4 (C) –3 (D) –4

6. $x+4$ ರಿಂದ $x^2 - 2x + 7$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ ನ್ನು $x-1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವು

(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$ ಮತ್ತು $x^4 - 1$ ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು

(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x+1$ (D) $x-1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$ ಮತ್ತು $x^4 - y^4$ ರ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು

(A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$ ಮತ್ತು $(x-a)^2$ ರ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು

(A) $(x^3 - a^3)(x+a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x-a)^2$

(C) $(x-a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x+a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. a^k, a^{k+3}, a^{k+5} ಇಲ್ಲಿ, $k \in \mathbb{N}$ ಇವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.

(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಸರಳ ರೂಪವು

(A) $\frac{x-3}{x+3}$ (B) $\frac{x+3}{x-3}$ (C) $\frac{x+2}{x-3}$ (D) $\frac{x-3}{x+2}$

13. $\frac{a+b}{a-b}$ ಮತ್ತು $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ ಗಳೆರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

(A) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\frac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14. $\frac{x^2 - 25}{x+3}$ ನ್ನು $\frac{x+5}{x^2 - 9}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಇದಕ್ಕೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\frac{b^3}{b-a}$ ರೊಂದಿಗೆ $\frac{a^3}{a-b}$ ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಹೊಸ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು

(A) $a^2 + ab + b^2$ (B) $a^2 - ab + b^2$ (C) $a^3 + b^3$ (D) $a^3 - b^3$

16. $49(x^2 - 2xy + y^2)^2$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು

(A) $7|x-y|$ (B) $7(x+y)(x-y)$ (C) $7(x+y)^2$ (D) $7(x-y)^2$

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು

(A) $|x+y-z|$ (B) $|x-y+z|$ (C) $|x+y+z|$ (D) $|x-y-z|$

18. $121x^4y^8z^6(l-m)^2$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವು

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2+bx+c=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, c ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $-\frac{b^2}{2a}$ (D) $-\frac{b^2}{4a}$

20. $x^2+5kx+16=0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>-\frac{8}{5}$ (C) $-\frac{8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

21. ಒಂದು ಮೂಲವು 3 ಆಗಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(C) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22. $x^2-bx+c=0$ ಮತ್ತು $x^2+bx-a=0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವು

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23. α,β ಗಳು $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, ತಪ್ಪಾದ ಹೇಳಿಕೆಯು

(A) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(C) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$

24. α ಮತ್ತು β ಗಳು $ax^2+bx+c=0$ ರ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $\frac{1}{\alpha}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{\beta}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $ax^2+bx+c=0$ (B) $bx^2+ax+c=0$

(C) $cx^2+bx+a=0$ (D) $cx^2+ax+b=0$

25. $b=a+c$ ಆದರೆ, $ax^2+bx+c=0$ ಸಮೀಕರಣವು

(A) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. (B) ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(C) ಸಮನಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. (D) ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- x ಮತ್ತು y ಎರಡು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.
- ಮೊದಲು ಚರಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ವರ್ಜಿಸಿ ನಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.
- $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಚಿತ್ರವು ತುಂಬಾ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

x y 1

b_1 c_1 a_1 b_1

b_2 c_2 a_2 b_2

- $p(k)=0$ ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ k ಎಂಬುದನ್ನು $p(x)$ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

- $p(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಬಹುಪದದ ಸೊನ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಡುವಿನ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧ

  ಸೊನ್ನೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

  ಸೊನ್ನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$

- (i) ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದ $p(x)$ ಗೆ, $x = a$ ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, $p(a) = 0$.
  (ii) $x - a$ ಎಂಬುದು $p(x)$ ನ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, $p(a) = 0$.
  ಇವೆರಡರ ವಿಲೋಮಗಳೂ ಸತ್ಯ.
- ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ವು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತವುಳ್ಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.
- ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವು ಅವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಕನಿಷ್ಠ ಘಾತದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.
- ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಭಾ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಆ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.
- $a \in \mathbb{R}$ ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. a ನ ವರ್ಗಮೂಲವು $b^2 = a$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ b ಆಗಿದೆ. a ನ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು $\sqrt[2]{a}$ ಅಥವಾ $\sqrt{a}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.
- x ಚರಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2 + bx + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$.
- ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (i) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ವಿಧಾನ (ii) ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನ (iii) ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸೂತ್ರ ಬಳಸಿ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.
- $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಆಗಿವೆ.
  ಇಲ್ಲಿ, $b^2 - 4ac \geq 0$ ಆಗಿರಬೇಕು.
- $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು
  (i) $b^2 - 4ac > 0$ ಆದರೆ, ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
  (ii) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ, ಎರಡು ಸಮಾನವಾದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.
  (iii) $b^2 - 4ac < 0$ ಆದರೆ, ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಫರ್ಮಾಟನ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ: $n > 2$ ಆದಾಗ $x^n + y^n = z^n$ ಸಮೀಕರಣವು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರು "ನಾನು ಸತ್ಯವಾಗಿ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಒಳಗೊಂಡಿರಲು ಈ ಚೌಕಟ್ಟು ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ" ಎಂದು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇದನ್ನು 1994 ರಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಆಂಡ್ರಿವ್ ವೈಲ್ಸ್‌ರವರು ಪರಿಹರಿಸುವವರೆಗೆ ಸುಮಾರು 300 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಯಾರೂ ಪರಿಹರಿಸಲಾಗಲಿಲ್ಲ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಆಂಡ್ರಿವ್ ವೈಲ್ಸ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಅವರ ಪಟ್ಟಣದ ಗ್ರಂಥಾಲಯದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರು.

4 ಮಾತೃಕೆಗಳು

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಮಾತೃಕೆಗಳ ರಚನೆ
- ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು
- ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ
- ಮಾತೃಕೆ ಸಮೀಕರಣಗಳು



ಜೇಮ್ಸ್ ಜೋಸೆಫ್ ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್

(1814-1897) ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್

ಇವರು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಅವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ಸಿದ್ಧಾಂತ, ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಿಗೆ ಮೂಲಭೂತ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು "ಶೋಧಕ" ಪದವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಂತೆ ಹಲವಾರು ಗಣಿತೀಯ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ.

1880 ರಲ್ಲಿ ಲಂಡನ್ನಿನ ರಾಯಲ್ ಸೊಸೈಟಿಯು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ನೀಡುವ ಉನ್ನತ ಬಹುಮಾನವಾದ ಕಾಪ್ಲೆ ಪದಕವನ್ನು ನೀಡಿ ಇವರನ್ನು ಗೌರವಿಸಿದೆ. 1901 ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಲಂಡನ್ನಿನ ರಾಯಲ್ ಸೊಸೈಟಿಯು ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್ ಪದಕವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದೆ.

Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred - Sylvester

4.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ "ಮಾತೃಕೆ" ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಗಣಿತೀಯ ವಿಷಯವನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

18 ಮತ್ತು 19 ನೇ ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯಾಗಿ ರೂಪಿಸಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲಾಯಿತು. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ವಸ್ತುಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ ಮತ್ತು ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರದಿಂದ ಉಂಟಾಯಿತು. ಆದಾಗ್ಯೂ ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹು ಶಕ್ತಿಯುತವಾದ ಸಾಧನಗಳಾಗಿವೆ. ಮಾತೃಕೆಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅವು ಹಲವಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ವಸ್ತುವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲು ಮತ್ತು ತುಂಬಾ ದಟ್ಟವಾದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಕೇತಗಳೊಂದಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ಗಣಿತೀಯ ಶೀಘ್ರಲಿಪಿಯು ತುಂಬಾ ನಾಜೋಕು ಮತ್ತು ಶಕ್ತಿಯುತವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಹಲವಾರು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಗಾಗಿ "ಮಾತೃಕೆ" ಎಂಬ ಪದವು 1850 ರಲ್ಲಿ **ಜೇಮ್ಸ್ ಜೋಸೆಫ್ ಸಿಲ್ವೆಸ್ಟರ್**ರವರಿಂದ ಪರಿಚಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು. "Matrix" ಎಂಬುದು ಗರ್ಭಾಶಯಕ್ಕೆ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ ಅದೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಲವೊಂದು ರಚಿತವಾಗುವ ಅಥವಾ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುವ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಕೂಡ ಅರ್ಥೈಸಬಹುದು.

x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ :

$$3x - 2y = 4 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \quad (2)$$

ಚರಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸದೇ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿ ವರ್ಜಿಸುವ (ಗಾಸಿಯನ್ ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವ) ವಿಧಾನದಿಂದ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ (2, 1) ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಮಾತೃಕೆಯ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

4.2 ಮಾತೃಕೆಗಳ ರಚನೆ (Formation of matrices)

ಮಾತೃಕೆಗಳು ಉದ್ಭವವಾಗುವ ಮಾರ್ಗಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕುಮಾರನು 10 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ. ( ) ದ ಒಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕುಮಾರನು ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥದೊಂದಿಗೆ ನಾವು ಇದನ್ನು (10) ಎಂಬಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಕುಮಾರನು 10 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ( ) ದ ಒಳಗಿರುವ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥದೊಂದಿಗೆ ನಾವು ಇದನ್ನು (10 7) ಎಂಬಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೋಡಿ:

ಕುಮಾರ ಮತ್ತು ಅವನ ಸ್ನೇಹಿತರಾದ ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

ಕುಮಾರನು 10 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ರಾಜು 8 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಗೋಪಿ 6 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಇದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಜೋಡಿಸಬಹದು.

	ಪೆನ್ನುಗಳು	ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು
ಕುಮಾರ	10	7
ರಾಜು	8	4
ಗೋಪಿ	6	5

ಇದನ್ನು ನಮೂದುಗಳು ಅನುಗುಣವಾದ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

(i) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$
← ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು
← ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು
← ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು

↑ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ↑ ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು

ಇದೇ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

	ಕುಮಾರ	ರಾಜು	ಗೋಪಿ
ಪೆನ್ನುಗಳು	10	8	6
ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳು	7	4	5

ಇದನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

(ii) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
← ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು
← ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು

↑ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ↑ ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ↑ ಮೂರನೆಯ ಕಂಬಸಾಲು

ಜೋಡಣೆ (i) ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, ಜೋಡಣೆ (ii) ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ನಮೂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕುಮಾರ, ರಾಜು ಮತ್ತು ಗೋಪಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು **ಮಾತೃಕೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಮಾತೃಕೆಯು ಚೌಕ ಆವರಣ ಅಥವಾ ಆವರಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳೊಳಗೆ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಾಗಿದೆ.

ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $A, B, X, Y, \cdots$ ಗಳಂತಹ ಒಂದು ದಪ್ಪ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮಾತೃಕೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ನಮೂದುಗಳು ಅಥವಾ ಅಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಆ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಆ ಮಾತೃಕೆಯ ಕಂಬಸಾಲು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ಮತ್ತು } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.1 ಮಾತೃಕೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (General form of a matrix)

m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ A ಮಾತೃಕೆಯು ಕೆಳಕಂಡ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ ಎಂಬವು ಮಾತೃಕೆಯ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ. ಮೇಲಿನ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ಅಥವಾ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ಎಂದೂ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

ಇಲ್ಲಿ, a_{ij} ಎಂಬುದು A ನ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು j ನೇ ಕಂಬಸಾಲು ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮತ್ರಕೆಯ ಅಂಶವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶ, $a_{23} = 1$.

ಹೀಗೆಯೇ, $a_{11} = 4, a_{12} = 5, a_{13} = 3, a_{21} = 6, a_{22} = 2, a_{31} = 7, a_{32} = 8$ ಮತ್ತು $a_{33} = 9$.

4.2.2 ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮ ಅಥವಾ ಆಯಾಮ (Order or dimension of a matrix)

A ಮಾತೃಕೆಯು m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $m \times n$ (m ಛೇದಕ n ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳುವುದು) ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಯು 2 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಒಂದು $m \times n$ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರ m ಯಾವಾಗಲೂ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಕ್ಷರ n ಯಾವಾಗಲೂ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

4.3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ವಿಧಗಳು (Types of matrices)

ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕೆಲವು ವಿಧಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

(i) ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ (Row matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸದಿಶ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = (5 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 1)$ ಮತ್ತು $B = (-3 \;\; 0 \;\; 5)$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1×4 ಮತ್ತು 1×3 ಕ್ರಮದ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = (a_{ij})_{1 \times n}$ ಎಂಬುದು $1 \times n$ ಕ್ರಮವುಳ್ಳ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ (Column matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಬಸಾಲು ಸದಿಶ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2×1 ಮತ್ತು 3×1 ಕ್ರಮದ ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ ಎಂಬುದು $m \times 1$ ಕ್ರಮವುಳ್ಳ ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

(iii) ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ (Square matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ಎಂಬುದು m ಕ್ರಮವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ ಅಂಶಗಳನ್ನು A ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಅಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(iv) ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆ (Diagonal matrix)

ಒಂದು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಎಲ್ಲಾ $i \neq j$ ಗೆ $a_{ij} = 0$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು.

(v) ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆ (Scalar matrix)

ಒಂದು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ಆದಾಗ} \\ k, & i = j \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$ ಇಲ್ಲಿ k ಒಂದು ಅದಿಶ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(vi) ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ (Unit matrix)

ಒಂದು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು 1 ಆದರೆ, ಆ ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. n ಕ್ರಮದ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು I_n ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಕ್ರಮಗಳ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ಆದಾಗ} \\ 0, & i \neq j \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$ ಆದರೆ, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅನನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಒಂದು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯು ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪಾತ್ರವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

(vii) ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ (Null matrix or Zero-matrix)

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು O ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ಎಂಬವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2×3 ಮತ್ತು 2×2 ಕ್ರಮಗಳ ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ (i) ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯಿಲ್ಲ. (ii) ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪಾತ್ರವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. (iii) ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಗೆ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಿಂದ ಕಳೆದರೆ, ಆ ಮಾತೃಕೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(viii) ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವಿಕೆ (Transpose of a matrix)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು A^T (A ನ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸುವಿಕೆ ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳಿ) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ ಆದರೆ, } \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಆದರೆ,

$$A^T = [b_{ij}]_{n\times m}. \text{ ಇಲ್ಲಿ, } i = 1, 2, \cdots, n \text{ ಮತ್ತು } j = 1, 2, \cdots, m \text{ ಗಳಿಗೆ } b_{ij} = a_{ji}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 4.1

ಕೋಷ್ಟಕವು ಐದು-ದಿನಗಳ ಗರಿಷ್ಠ (H) ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ (L) ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಫ್ಯಾರನ್‌ಹೀಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುತ್ತಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಯಾವ ದಿನ ಹೆಚ್ಚು ಶಾಖವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ?

ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ
ಗ 88	ಗ 90	ಗ 86	ಗ 84	ಗ 85
ಕ 54	ಕ 56	ಕ 53	ಕ 52	ಕ 52

ಪರಿಹಾರ ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

$$A = \begin{matrix} & \text{ಸೋಮ} & \text{ಮಂಗಳ} & \text{ಬುಧ} & \text{ಗುರು} & \text{ಶುಕ್ರ} \\ \text{ಗರಿಷ್ಠ} & 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ \text{ಕನಿಷ್ಠ} & 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{matrix}. \quad \text{ಅಂದರೆ, } A = \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}$$

ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು (ಗರಿಷ್ಠ) ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ, ಮಂಗಳವಾರವು ಹೆಚ್ಚು ಶಾಖವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ದಿನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.2

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕೊಬ್ಬು, ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟ್ ಮತ್ತು ಪ್ರೋಟೀನ್‌ಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

	ಪದಾರ್ಥ 1	ಪದಾರ್ಥ 2	ಪದಾರ್ಥ 3	ಪದಾರ್ಥ 4
ಕೊಬ್ಬು	5	0	1	10
ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟ್	0	15	6	9
ಪ್ರೋಟೀನ್	7	1	2	8

3×4 ಮತ್ತು 4×3 ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು, ಕಂಬಸಾಲುಗಳು ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ 3×4 ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ ಎಂಬಂತೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ 4×3 ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ಎಂಬಂತೆ ನಾವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 4.3 $A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮ (ii) a_{13} ಮತ್ತು a_{42} ಅಂಶಗಳು (iii) 2 ಎಂಬ ಅಂಶದ ಸ್ಥಾನ.

ಪರಿಹಾರ (i) A ಮಾತೃಕೆಯು 4 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 4×3 ಆಗಿದೆ.

(ii) a_{13} ಅಂಶವು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. $\therefore\ a_{13} = 8.$
ಹೀಗೆಯೇ, $a_{42} = -2$, ನಾಲ್ಕನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶ.

(iii) 2 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ. $\therefore\ a_{22} = 2.$

ಉದಾಹರಣೆ 4.4

ಅಂಶಗಳು $a_{ij} = |2i - 3j|$ ಆಗಿರುವ 2×3 ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, 2×3 ಮಾತೃಕೆಯು

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = |2i - 3j|$ ಇಲ್ಲಿ, $i = 1, 2$ ಮತ್ತು $j = 1, 2, 3$

$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = |-1| = 1,\ a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4,\ a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$

$a_{21} = [2(2) - 3] = 1,\qquad a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2,\ a_{23} = |2(2) - 9| = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಮಾತೃಕೆಯು $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.5

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A^T ಮತ್ತು $(A^T)^T$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

A ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ A ಮಾತೃಕೆಯ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆ A^T ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ಹೀಗೆಯೇ, A^T ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ $(A^T)^T$ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, $(A^T)^T = A$. ಯಾವುದೇ ಮಾತೃಕೆ B ಗೆ, $(B^T)^T = B$ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದೇ ಅದಿಶ k ಗೆ, $(kA)^T = kA^T$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಒಂದು ಜಲ ಕ್ರೀಡಾ ಉದ್ಯಾನವನದ ಪ್ರವೇಶ ಚೀಟಿಯ ದರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

	ವಾರದ ದಿನಗಳ ದರಗಳು (₹)	ವಾರಾಂತ್ಯದ ದರಗಳು (₹)
ವಯಸ್ಕರು	400	500
ಮಕ್ಕಳು	200	250
ಹಿರಿಯ ನಾಗರಿಕರು	300	400

ವಯಸ್ಕರು, ಮಕ್ಕಳು ಮತ್ತು ಹಿರಿಯ ನಾಗರಿಕರ ಪ್ರವೇಶ ಚೀಟಿಗಳ ದರಗಳಿಗೆ ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ 6 ಹಿರಿಯ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳು, 8 ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಗಳು ಮತ್ತು 13 ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಗಳಿವೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು 3×1 ಮತ್ತು 1×3 ಮಾತೃಕೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $(3 \;\; 4 \;\; 5)$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು 8 ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮಾತೃಕೆಯು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಕ್ರಮಗಳೇನು?

5. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯು 30 ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮಾತೃಕೆಯು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಕ್ರಮಗಳೇನು?

6. ಅಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ 2×2 ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]$ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$

7. ಅಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ 3×2 ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]$ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \frac{|2i-3j|}{2}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, (i) ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ii) a_{24} ಮತ್ತು a_{32} ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. (iii) 7 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಯಾವ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಯಾವ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿದೆ?

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A ನ ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಿದ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(A^T)^T = A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

4.4 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (Operation on matrices)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಾನತೆ, ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರ, ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

(i) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಮಾನತೆ (Equality of matrices)

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ಮತ್ತು $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಸಮಾನವಾದವು ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ,

(i) ಅವು ಒಂದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು ಮತ್ತು

(ii) A ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶವು B ನ ಅನುರೂಪ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $a_{ij} = b_{ij}$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವು ಸಮಾನವಾದ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲ.

ಹಾಗೂ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. ಏಕೆಂದರೆ, ಅನುರೂಪವಾದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳು ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.6

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x, y ಮತ್ತು z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳು ಸಮನಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ, $x = 3$, $y = 9$ ಮತ್ತು $z = 4$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.7

ಬಿಡಿಸಿರಿ : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2x \\ 31 + 4y \end{pmatrix}$

ಪರಿಹಾರ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $y = 6 - 2x$ ಮತ್ತು $3x = 31 + 4y$.

ಇನ್ನೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = 6 - 2x$ ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ, $3x = 31 + 4(6 - 2x)$

$$3x = 31 + 24 - 8x$$

$\therefore$ $x = 5$ ಮತ್ತು $y = 6 - 2(5) = -4$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 5$ ಮತ್ತು $y = -4$.

(ii) ಒಂದು ಅದಿಶದಿಂದ ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರ (Multiplication of a matrix by a scalar)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅದಿಶ (ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ) k ಗೆ, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ಹೊಸ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $b_{ij} = ka_{ij}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು ಅದಿಶ k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ B ಮಾತೃಕೆಯು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $B = kA$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಅದಿಶ ಗುಣಾಕಾರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.8

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $3A$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $3A$ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

(iii) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನ (Addition of matrices)

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು 3 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 3 ಹುಡುಗಿಯರು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ

$A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ ಹುಡುಗರು / ಹುಡುಗಿಯರು

ವಿಜ್ಞಾನ

$B = \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ ಹುಡುಗರು / ಹುಡುಗಿಯರು

ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಳಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳ ಅನುರೂಪ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೂಡಬೇಕು.

$$A + B = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45+51 & 72+80 & 81+90 \\ 30+42 & 90+85 & 65+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 152 & 171 \\ 72 & 175 & 135 \end{pmatrix}$$

ಅಂತಿಮ ಮಾತೃಕೆಯು ಮೊದಲ ಹುಡುಗನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 96 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ಕೊನೆಯ ಹುಡುಗಿಯು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 135 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾಳೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವು ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವು ಮಾತೃಕೆ $C = [c_{ij}]_{mxn}$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

ಮಾತೃಕೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಂಕಲನದ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿರುವಂತೆಯೇ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು $A+B$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮಗಳ ಮಾತೃಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.9

$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಲಭ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $A+B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.10

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A + B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು 2×4 ಒಂದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7 \\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(iv) ಮಾತೃಕೆಯ ಋಣಾತ್ಮಕ (Negative of a matrix)

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ ಮಾತೃಕೆಯ ಋಣಾತ್ಮಕವನ್ನು $-A$ ರಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $-A = (-1)A$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $-A = [b_{ij}]_{mxn}$. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $b_{ij} = -a_{ij}$.

(v) ಮಾತೃಕೆಗಳ ವ್ಯವಕಲನ (Subtraction of matrices)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, ವ್ಯವಕಲನ $A - B$ ಎಂಬುದನ್ನು $A - B = A + (-1)B$ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, $A - B = [c_{ij}]$. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ i ಮತ್ತು j ಗಳಿಗೆ $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.11

ತೂಕವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪಥ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಹುಡುಗಿಯರ ಆರಂಭದ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ A ಮಾತೃಕೆಯು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಪಥ್ಯದ ನಂತರ ಅವರ ಅನುಗುಣವಾದ ತೂಕಗಳನ್ನು B ಮಾತೃಕೆಯು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ಹುಡುಗರು} \\ \text{ಹುಡುಗಿಯರು} \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ಹುಡುಗರು} \\ \text{ಹುಡುಗಿಯರು} \end{matrix}$$

ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರು ಕಳೆದುಕೊಂಡ ತೂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕಳೆದುಕೊಂಡ ತೂಕಗಳ ಮಾತೃಕೆ, $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of matrix addition)

(i) ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

A ಮತ್ತು B ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $A+B = B+A$.

(ii) ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.

A, B ಮತ್ತು C ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶದ ಲಭ್ಯತೆ

ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಯು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತಾಂಶವಾಗಿದೆ. A ಎಂಬುದು $m \times n$ ಕ್ರಮದ ಮಾತೃಕೆಯಾದರೆ, $A + O = O + A = A$. ಇಲ್ಲಿ O ಎಂಬುದು $m\times n$ ಕ್ರಮದ ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದೆ.

(iv) ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮಾಂಶದ ಲಭ್ಯತೆ

A ಮಾತೃಕೆಗೆ, $B + A = A + B = O$ ಆದರೆ, B ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$A + (-A) = (-A) + A = O$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $-A$ ಎಂಬುದು A ನ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವು ಅದರ ಋಣಾತ್ಮಕ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಏಕೈಕ (ಒಂದೇ ಒಂದು) ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. ಮಾತೃಕೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x, y ಮತ್ತು z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = 2A + B$ ಆದರೆ, C ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $6A - 3B$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, a ಮತ್ತು b ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, X ಮತ್ತು Y ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ,

$A + (B + C) = (A + B) + C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

11. ಒಂದು ಎಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ ಕಂಪನಿಯು ಅದರ ಮೂರು ಶಾಖೆಯ ಮಳಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳು ತಮ್ಮ ಪೂರೈಕೆಯ ಖರೀದಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಮಾರಾಟವಾದ ಪ್ರತಿ ವಿಧದ ಮನರಂಜನಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡು ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

		ಟಿ.ವಿ.	ಡಿ.ವಿ.ಡಿ	ವಿಡಿಯೋಗೇಮ್ಸ್	ಸಿ.ಡಿ. ಪ್ಲೇಯರ್ಸ್
ವಾರ I	ಮಳಿಗೆ I	30	15	12	10
	ಮಳಿಗೆ II	40	20	15	15
	ಮಳಿಗೆ III	25	18	10	12
ವಾರ II	ಮಳಿಗೆ I	25	12	8	6
	ಮಳಿಗೆ II	32	10	10	12
	ಮಳಿಗೆ III	22	15	8	10

ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಎರಡು ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟವಾದ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಈಜು ಕೊಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ದಿನದ ಪ್ರವೇಶ ಶುಲ್ಕದ ವಿವರವು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ದೈನಂದಿನ ಪ್ರವೇಶ ಶುಲ್ಕ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ		
ಸದಸ್ಯತ್ವ	ಮಕ್ಕಳು	ವಯಸ್ಕರು
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರೊಳಗೆ	20	30
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರ ನಂತರ	30	40
ಸದಸ್ಯತ್ವ–ರಹಿತ		
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರೊಳಗೆ	25	35
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರ ನಂತರ	40	50

ಸದಸ್ಯತ್ವ–ರಹಿತಕ್ಕಾಗಿ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4.6 ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ (Multiplication of matrices)

ಕುಮಾರಿಯು 3 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 2 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಮೀನಾಳು 4 ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನಿನ ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹10 ಮತ್ತು ₹5 . ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

$3\times 10 + 2\times 5 = 40$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕುಮಾರಿಗೆ ₹ 40 ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

$4\times 10 + 5\times 5 = 65$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೀನಾಳಿಗೆ ₹ 65 ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನೂ ಬಳಸಿ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯೋಣ.

ಅಗತ್ಯತೆಗಳು	ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಕುಮಾರಿ, ಮೀನಾ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 10 + 2\times 5 \\ 4\times 10 + 5\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 65 \end{pmatrix}$

ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹8 ಮತ್ತು ₹4 ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕುಮಾರಿ ಮತ್ತು ಮೀನಾಳಿಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $3\times 8 + 2\times 4 =$ ₹32 ಮತ್ತು $4\times 8 + 5\times 4 =$ ₹ 52 ಆಗಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

ಅಗತ್ಯತೆಗಳು	ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಕುಮಾರಿ, ಮೀನಾ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 8 + 2\times 4 \\ 4\times 8 + 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix}$

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾತೃಕೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಬಹುದು.

ಅಗತ್ಯತೆಗಳು	ಬೆಲೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)	ಬೇಕಾಗಿರುವ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)
ಕುಮಾರಿ, ಮೀನಾ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 10 + 2\times 5 & 3\times 8 + 2\times 4 \\ 4\times 10 + 5\times 5 & 4\times 8 + 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 32 \\ 65 & 52 \end{pmatrix}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾದರೆ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ನಾವು ಮೊದಲ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಮಾತೃಕೆಯ ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಂಶಗಳನುಸಾರವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಸರಳವಾದ ಉದಾಹರಣೆಯು ಗುಣಲಬ್ಧವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿರುವಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. AB ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದು

$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ಆಗಿದೆ.

ಹಂತ 1 : A ನ ಮೊದಲ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು B ನ ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ, ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿರಿ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು AB ಯ ಮೊದಲ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + (-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 2: A ನ ಮೊದಲ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು B ನ ಎರಡನೇ ಕಂಬಸಾಲನ್ನು ಬಳಸಿ, ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿರುವ ಅದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು AB ಯ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 3: A ನ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು B ನ ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನೊಂದಿಗೆ ಅದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರಿ. ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು AB ಯ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 4: A ನ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು B ನ ಎರಡನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಅದೇ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿರಿ.

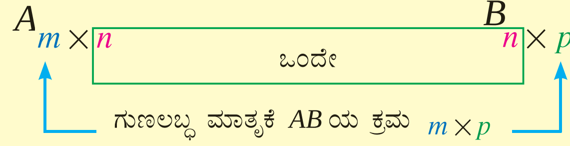
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

ಹಂತ 5: AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ಮತ್ತು $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ಆದರೆ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕ್ರಮವು $m\times p$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸತ್ಯ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಉದಾಹರಣೆ 4.12

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ಗುಣಲಬ್ಧವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $A_{2\times 5}$ ಮತ್ತು $B_{5\times 4}$ (ii) $A_{1\times 3}$ ಮತ್ತು $B_{4\times 3}$

ಪರಿಹಾರ

(i) A ನಲ್ಲಿರುವ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಗುಣಲಬ್ಧವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೂ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×4 ಆಗಿದೆ.

(ii) A ನ ಕ್ರಮವು 1×3 ಮತ್ತು B ನ ಕ್ರಮವು 4×3 ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

A ನಲ್ಲಿರುವ ಕಂಬಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.13

ಬಿಡಿಸಿರಿ: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

ಪರಿಹಾರ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$3x + 2y = 8$ ಮತ್ತು $4x + 5y = 13$

$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0$ ಮತ್ತು $4x + 5y - 13 = 0.$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ,

	x		y		1	
2		–8		3		2
5		–13		4		5

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26 + 40} = \frac{y}{-32 + 39} = \frac{1}{15 - 8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2, \quad y = 1$

ಉದಾಹರಣೆ 4.14

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A^2 - (a + d)A = (bc - ad)I_2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(a + d)A = (a + d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$A^2 - (a + d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A^2 - (a + d)A = (bc - ad)I_2$

4.7 ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು (Properties of matrix multiplication)

ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳೆಂದರೆ, (i) $AB \neq BA$ (ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ) (ii) $AB = 0$ ಎಂಬುದು A ಅಥವಾ B ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು (iii) $AB = AC$, A ಯು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಮಾತೃಕೆ, ಎಂಬುದು ಯಾವಾಗಲೂ $B = C$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

(i) $AB \neq BA$ (ii) $AD = O$, ಆದಾಗ್ಯೂ, A ಮತ್ತು D ಗಳು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆಗಳಲ್ಲ ಮತ್ತು (iii) $AB = AC$, ಆದರೆ $B \neq C$. ಮಾತೃಕೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನಾವು ನೋಡೋಣ.

(i) ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದು ಹಾಗೂ AB ಮತ್ತು BA ಗಳೆರಡೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, $AB = BA$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ಕಡ್ಡಾಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.15

$A=\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B=\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}$ ಆದರೆ, AB ಮತ್ತು BA ಗಳನ್ನು ಲಭ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 3×2 ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಮತ್ತು BA ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆರಡೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿವೆ.

$$AB=\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}72-42&-24+7&16+35\\-18+24&6-4&-4-20\\0+18&0-3&0-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&-17&51\\6&2&-24\\18&-3&-15\end{pmatrix}$$

ಹೀಗೆಯೇ,

$$BA=\begin{pmatrix}9&-3&2\\6&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-7\\-2&4\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78&-69\\50&-61\end{pmatrix}.$$ ($AB \neq BA$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.)

> **ಗಮನಿಸಿ**
>
> ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ, ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯು ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ, ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವಾಗ, $(AB)C = A(BC)$.

(iii) ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಂಕಲನದ ಮೇಲೆ ವಿಭಾಜಕತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ

ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಮಾತೃಕೆಗಳು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ, (i) $A(B+C) = AB + AC$.

(ii) ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವಾಗ, $(A+B)C = AC + BC$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.16

$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&5\\6&7\end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C=\begin{pmatrix}1&1\\-5&3\end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A(B+C) = AB + AC$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $B+C=\begin{pmatrix}-2&5\\6&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6\\1&10\end{pmatrix}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A(B+C)=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&6\\1&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&38\\5&34\end{pmatrix}$ (1)

ಈಗ, $AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -6+12 & 15+14 \\ 2+24 & -5+28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-10 & 3+6 \\ -1-20 & -1+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 29 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 \\ 5 & 34 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $A(B+C) = AB + AC$.

(iv) ಗುಣಾಕಾರದ ಅನನ್ಯತೆಯ ಲಭ್ಯತೆ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೊಂದಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಸಮಾನವಾದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮಾತೃಕೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

n ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ A ಗೆ, $AI = IA = A$. ಇಲ್ಲಿ, I ಎಂಬುದು n ಕ್ರಮದ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, I ಎಂಬುದನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ **ಅನನ್ಯತಾ ಮಾತೃಕೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.17

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $AI = IA = A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ, I ಎಂಬುದು ಕ್ರಮ 2 ರ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿದೆ.)

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 9+0 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$

ಹಾಗೂ, $IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 0+9 & 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = A$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AI = IA = A$.

(v) ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮದ ಲಭ್ಯತೆ

A ಎಂಬುದು n ಕ್ರಮದ ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿದ್ದು, $AB = BA = I$, ಇಲ್ಲಿ I ಎಂಬುದು n ಕ್ರಮದ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ, ಆಗಿರುವಂತೆ n ಕ್ರಮದ B ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯು ಲಭ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, B ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು A ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು A^{-1} ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) B ಯು A ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವಾದರೆ, A ಯು B ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಒಂದು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮವು ಲಭ್ಯವಾದರೆ, ಅದು ಏಕೈಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4.18

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

ಹಾಗೂ, $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\therefore$ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿವೆ.

(vi) ಮಾತೃಕೆಗಳ ಸ್ಥಳಾಂತರಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಲೋಮ ನಿಯಮ

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳಾಗಿದ್ದು, AB ಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದರೆ, $(AB)^T = B^T A^T$.

ಉದಾಹರಣೆ 4.19

$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = (1 \;\; 3 \;\; -6)$ ಆದರೆ, $(AB)^T = B^T A^T$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \;\; 3 \;\; -6) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (1)

ಈಗ, $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}(-2 \;\; 4 \;\; 5)$

$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $(AB)^T = B^T A^T$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

   (i) AB, ಇಲ್ಲಿ $A = [a_{ij}]_{4x3}, B = [b_{ij}]_{3x2}$ (ii) PQ, ಇಲ್ಲಿ $P = [p_{ij}]_{4x3}, Q = [q_{ij}]_{4x3}$

   (iii) MN, ಇಲ್ಲಿ $M = [m_{ij}]_{3x1}, N = [n_{ij}]_{1x5}$ (iv) RS, ಇಲ್ಲಿ $R = [r_{ij}]_{2x2}, S = [s_{ij}]_{2x2}$

2. ಲಭ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $(2 \;\; -1)\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

   (iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}(2 \;\; -7)$

3. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣಿನ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ತನ್ನ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಾನೆ. ಒಂದು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣು, ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 20, ₹ 10 ಮತ್ತು ₹ 5 ಆಗಿದೆ. ಮೂರು ದಿನಗಳಲ್ಲಾದ ಮಾರಾಟದ ವಿವರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ದಿನ	ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು	ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು	ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳು
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

ಪ್ರತಿ ದಿನ ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಬಗೆಯ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ್ದರಿಂದ ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಒಟ್ಟು ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ ಹಾಗೂ $AX = C$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, AB ಮತ್ತು BA ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = (2 \quad 1)$ ಆದರೆ, $(AB)C = A(BC)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(AB)^T = B^T A^T$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

10. ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. ಬಿಡಿಸಿರಿ : $(x \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = (\ 0\ )$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $(A+B)C$ ಮತ್ತು $AC + BC$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $(A+B)C = AC + BC$ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಲ್ಲದ ಹೇಳಿಕೆ ಯಾವುದು?
   (A) ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (B) ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (C) ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   (D) ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯು ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಮಾತೃಕೆಯು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾದರೆ,
   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = 1$ (D) $m = n$

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ
   (A) $-2, 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ (D) $2, -7$

4. $A = (1 \quad -2 \quad 3)$ ಮತ್ತು $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A + B$ ಯು
   (A) $(0 \quad 0 \quad 0)$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (C) (-14) (D) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ

5. ಒಂದು ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು 2×3 ಆದರೆ, ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು
   (A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯು
   (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. A ನ ಕ್ರಮವು 3×4 ಮತ್ತು B ನ ಕ್ರಮವು 4×3 ಆದರೆ, BA ನ ಕ್ರಮವು
   (A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ

8. $A\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$ ಆದರೆ, A ನ ಕ್ರಮವು
   (A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

9. $AB = I$ ಮತ್ತು $BA = I$ ಆಗುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, B ಯು
   (A) ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆ (B) ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ
   (C) A ನ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮ ಮಾತೃಕೆ (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ
   (A) 2 , 0 (B) 0 , 2 (C) 0 , -2 (D) 1 , 1

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $A + B = O$ ಆದರೆ, B ಯು

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, A^2 ಎಂಬುದು

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. Aನ ಕ್ರಮವು $m \times n$ ಮತ್ತು Bನ ಕ್ರಮವು $p \times q$ ಆಗಿದ್ದು, A ಮತ್ತು Bಗಳ ಸಂಕಲನವು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ,

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ ಎಂಬುದು $A^2 = I$ ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ,

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ ಮತ್ತು $a_{ij} = i + j$ ಆದರೆ, $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, a, b, c ಮತ್ತು d ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) 1, 0, 0, 1 (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) 1, 0, 0, 0

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ಮತ್ತು $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, ಮಾತೃಕೆ $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಗೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- ಮಾತೃಕೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಯತಾಕಾರದ ಜೋಡಣೆಯಾಗಿದೆ.
- m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಮತ್ತು n ಕಂಬಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $m \times n$ ಆಗಿದೆ.
- $m = 1$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂಬುದು ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $n = 1$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂಬುದು ಕಂಬಸಾಲು ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $m = n$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ಎಂಬುದು ವರ್ಗ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $i \neq j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 0$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ಎಂಬುದು ಕರ್ಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $i \neq j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 0$ ಮತ್ತು $i = j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = k$. (k ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ) ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ಪರಿಮಾಣ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- $i = j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 1$ ಮತ್ತು $i \neq j$ ಆದಾಗ $a_{ij} = 0$ ಆದರೆ, $A = [a_{ij}]$ ಏಕಾಂಶ ಮಾತೃಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ ಮಾತೃಕೆಯನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.
- A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು ಒಂದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪವಾದ ಅಂಶಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಕ್ರಮಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.
- ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  ಅಂದರೆ, A ಮತ್ತು B ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $A + B = B + A$.
- ಮಾತೃಕೆಯ ಸಂಕಲನವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿದೆ.
  ಅಂದರೆ, A, B ಮತ್ತು C ಒಂದೇ ಕ್ರಮದ ಮಾತೃಕೆಗಳಾದರೆ, $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- A ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $m\times n$ ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಯ ಕ್ರಮವು $n\times p$ ಆದರೆ, AB ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತೃಕೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $m\times p$ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
- ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, $AB \neq BA$.
- ಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಮಾತೃಕೆಯ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
  ಅಂದರೆ, $(AB)C = A(BC)$.
- $(A^T)^T = A,\ (A + B)^T = A^T + B^T$ ಮತ್ತು $(AB)^T = B^T A^T$
- $AB = BA = I$ ಆದರೆ, A ಮತ್ತು B ಮಾತೃಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.
- $AB = O$ ಆದರೆ, $A = O$ ಅಥವಾ $B = O$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯಿಲ್ಲ.
  ಅಂದರೆ, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಎರಡು ಮಾತೃಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಶೂನ್ಯ ಮಾತೃಕೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

2003 ರಲ್ಲಿ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಒಂದು ಮಿಲಿಯನ್ ಯು.ಎಸ್.ಡಾಲರ್ ಮೊತ್ತದ ಅಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಇದು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು, ನಾರ್ವೆನ ವಿಜ್ಞಾನದ ಅಕಾಡೆಮಿರವರಿಂದ ನೀಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಉನ್ನತ ಸಾಧನೆಗೈದ ಒಬ್ಬರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ನಾರ್ವೆನ ರಾಜ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಚೆನ್ನೈನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿರುವ ಭಾರತೀಯ, ಅಮೇರಿಕಾವಾಸಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಎಸ್.ಆರ್.ಶ್ರೀನಿವಾಸ ವರದನ್‌ರವರಿಗೆ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಅವರ ಮೂಲಭೂತ ಕೊಡುಗೆಗಾಗಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಾಪಕ ವಿಚಲನೆಗಳ ಏಕರೂಪ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ 2007 ರಲ್ಲಿ ಅಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

5 ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically - Leonardo de Vinci

- ಪೀಠಿಕೆ
- ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ
- ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
- ಸರಳರೇಖೆಗಳು



ಪೀರೆ ಡಿ ಫರ್ಮಾಟ್
(1601-1665) ಫ್ರಾನ್ಸ್

17 ನೇ ಶತಮಾನದ ಮೊದಲ ಅರ್ಧದಲ್ಲಿ ಮುಂಚೂಣಿಯ ಇಬ್ಬರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರುಗಳಲ್ಲಿ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆರೊಂದಿಗೆ ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರು ಒಬ್ಬರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಭೂತ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದರು. ಇವರು ವಕ್ರ ರೇಖೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಊರ್ಧ್ವಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೂಲ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದರು.

ಇವರು ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿನ ಆದಿ ಪರಿಶೋಧನೆಯ ಕಾರ್ಯಗಳನ್ನು 1636 ರಲ್ಲಿ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಇದು ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ "ಲಾ ಜಾಮೆಟ್ರಿ" ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡಿತು.

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ರೇಖಾಗಣಿತವಾಗಿದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ನಡುವಿನ ಸೇತುವೆಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಫ್ರೆಂಚ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ರೇಖಾಗಣಿತದ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಅಧ್ಯಯನವು ನಡೆಯಿತು. ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಬಳಕೆಯು ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರ ಮಹತ್ವಪೂರ್ಣ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಕ್ರಾಂತಿಯಾಗಿದೆ. ಇವರು 1637 ರಲ್ಲಿ "ಲಾ ಜಾಮೆಟ್ರಿ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದರು. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ, ಅವರು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಮತ್ತು ನಂತರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಪೀರೆ ಡಿ ಫರ್ಮಾಟ್‌ರವರೂ ಕೂಡಾ ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸೂತ್ರೀಕರಿಸಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಮಹಾ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. 1692 ರಲ್ಲಿ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಗಾಟ್‌ಫ್ರೆಡ್ ವಿಲ್ಹೆಲ್ಮ್ ವಾನ್ ಲೀಬ್ನಿಟ್ಸ್‌ರವರು ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜಾಂಕ ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವಾಂಕಗಳಂತಹ ಆಧುನಿಕ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದ್ದಾರೆ. ನಿಕೋಲಸ್ ಮುರ್ರೆ ಬಟ್ಲರ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ "ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ನ್ಯೂಟನ್ ಹಾಗೂ ಲೀಬ್ನಿಟ್ಸ್‌ರವರ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರಗಳು ಅದ್ಭುತವಾದ ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿತವಾಗಿವೆ".

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳಾದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳು, ಸಮತಲ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳಂತಹ ವಿಚಾರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಪ್ರವಣತೆ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

5.2 ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ (Section formula)

ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಒಬ್ಬನು A ಯಿಂದ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ 60 ಕಿ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿ, ನಂತರ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 30 ಕಿ.ಮೀ. ಚಲಿಸಿ B ಪಟ್ಟಣವನ್ನು ತಲುಪಬಹುದು ಎಂದು ಊಹಿಸಿರಿ. ಒಂದು ದೂರ ಸಂಪರ್ಕ ಸಂಸ್ಥೆಯು A

ಮತ್ತು B ಪಟ್ಟಣಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1:2$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಸಾರ ಗೋಪುರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬಯಸಿದೆ. ಈಗ ಪ್ರಸಾರ ಗೋಪುರವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾದ P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಸ್ಥೆಯು ತಿಳಿಯಲು ಬಯಸಿದೆ.

A ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಿ. $P(x,y)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. P ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಂದ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ C ಮತ್ತು D ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P ಯಿಂದ BD ಗೆ E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 5.1

ΔPAC ಮತ್ತು ΔBPE ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

ಈಗ, $\frac{AC}{PE} = \frac{1}{2}$	ಹಾಗೂ, $\frac{PC}{BE} = \frac{1}{2}$
$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$	$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$
$2x = 60 - x$	$2y = 30 - y$
ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 20.$	ಆದ್ದರಿಂದ, $y = 10.$

$\therefore$ ಪ್ರಸಾರ ಗೋಪುರದ ಸ್ಥಾನವು $P(20,10)$ ಆಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಮಾದರಿಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸೋಣ.

$P(x, y)$ ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l:m$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವಂತೆ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$.

ಚಿತ್ರ 5.2 ರಿಂದ, $AF = CD = OD - OC = x - x_1$

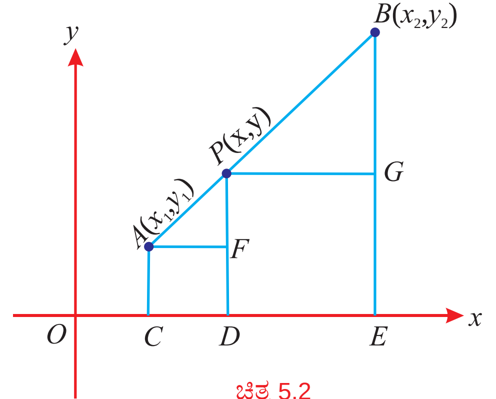
$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$

ಹಾಗೂ, $PF = PD - FD = y - y_1$

$BG = BE - GE = y_2 - y$

ಈಗ, ΔAFP ಮತ್ತು ΔPGB ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

(ಅಧ್ಯಾಯ 6ರ ವಿಭಾಗ 6.3ನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 5.2

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$

$\therefore \quad \frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$ ಮತ್ತು $\frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$	$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$
$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx$	$\Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$
$lx + mx = lx_2 + mx_1$	$ly + my = ly_2 + my_1$
$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$	$\Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l:m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ.

$$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right)$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಬಂಧಿತ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದುವು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $l:m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l-m}, \frac{ly_2 - my_1}{l-m}\right)$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, $\frac{l}{m}$ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ.

(ii) **AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (Midpoint)**

AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು M ಆದರೆ, AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು M ಬಿಂದುವು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1:1 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, $l = 1$ ಮತ್ತು $m = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು

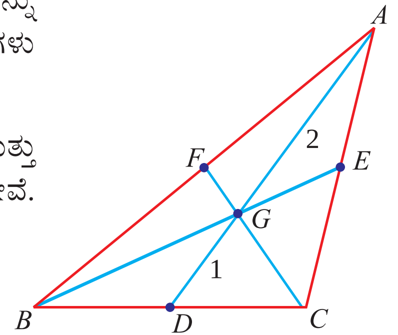
$M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

(iii) **ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ (Centroid of a triangle)**

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಎಂಬ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ΔABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. AD, BE ಮತ್ತು CF ಗಳು ΔABC ಯ ಮಧ್ಯರೇಖೆ(ಔನ್ನತ್ಯ)ಗಳಾಗಿರಲಿ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕೀಭವನ(ಏಕಸಂಪಾತ)ವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಏಕೀಭವನ ಬಿಂದುವು ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.3

ΔABC ಯ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು $G(x, y)$ ಆಗಿರಲಿ.

BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ ಆಗಿದೆ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ, ಗುರತ್ವಕೇಂದ್ರ G ಯು AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $2:1$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು

$$G(x, y) = G\left(\frac{2\frac{(x_2 + x_3)}{2} + 1(x_1)}{2+1}, \frac{2\frac{(y_2 + y_3)}{2} + 1(y_1)}{2+1}\right)$$

$$= G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

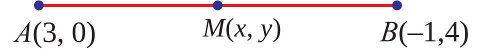
(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x_3, y_3) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ,
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.1

$(3, 0)$ ಮತ್ತು $(-1, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $M(x, y)$ ಎಂಬುದು

$$M(x, y) = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



ಚಿತ್ರ 5.4

$\therefore$ $(3, 0)$ ಮತ್ತು $(-1, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

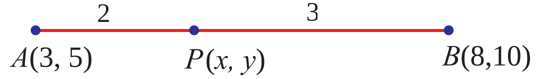
$$M(x, y) = M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2).$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.2

$(3, 5)$ ಮತ್ತು $(8, 10)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:3$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(3, 5)$ ಮತ್ತು $B(8, 10)$ ಆಗಿರಲಿ.

AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:3$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವು $P(x,y)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.5

ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, $P(x, y) = P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right)$

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = 3, y_1 = 5, x_2 = 8, y_2 = 10$ ಮತ್ತು $l = 2, m = 3$

$$\therefore \quad P(x, y) = P\left(\frac{2(8) + 3(3)}{2+3}, \frac{2(10) + 3(5)}{2+3}\right) = P(5, 7)$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.3

$A(-3, 5)$ ಮತ್ತು $B(4, -9)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $P(-2, 3)$ ಬಿಂದುವು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(-3, 5)$ ಮತ್ತು $B(4, -9)$ ಆಗಿವೆ.

$P(-2, 3)$ ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l:m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.6

ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\right) = P(-2, 3) \qquad (1)$$

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9$.

$(1) \Longrightarrow \left(\frac{l(4)+m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9)+m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$

x- ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{4l-3m}{l+m} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

ಅಂದರೆ, $l : m = 1 : 6$

ಆದ್ದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1 : 6$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿಯೂ ಸಹ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(ii) ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಅನುಪಾತಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(iii) ಒಂದು ಬಿಂದುವು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, $\frac{l}{m}$ ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

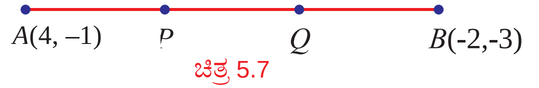
(iv) ಒಂದು ಬಿಂದುವು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, $\frac{l}{m}$ ಎಂಬುದು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.4

$(4, -1)$ ಮತ್ತು $(-2, -3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

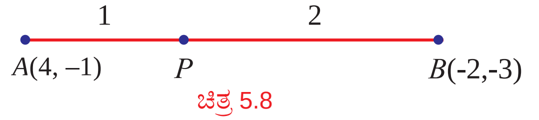
ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(4,-1)$ ಮತ್ತು $B(-2,-3)$ ಆಗಿರಲಿ.

$AP = PQ = QB$ ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ತ್ರಿವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳು $P(x,y)$ ಮತ್ತು $Q(a,b)$ ಆಗಿರಲಿ.

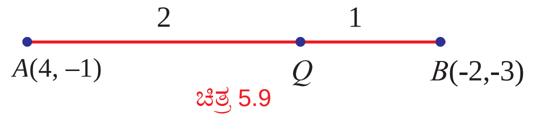


ಚಿತ್ರ 5.7

ಆದ್ದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1 : 2$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $2 : 1$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.8



ಚಿತ್ರ 5.9

$\therefore$ ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಬಿಂದುಗಳು

$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right)$ ಮತ್ತು

$Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$

$\Longrightarrow \; P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right)$ ಮತ್ತು $Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$

$= P\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ $\qquad = Q\left(0, -\frac{7}{3}\right)$.

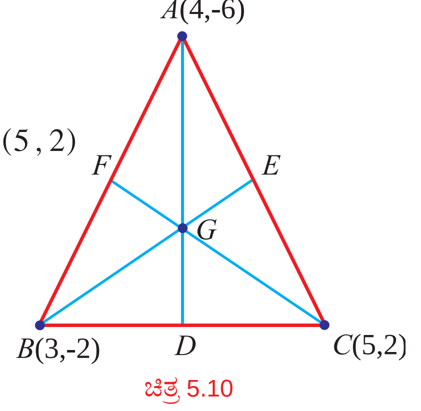
PB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು Q ಮತ್ತು AQ ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು P ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.5

$A(4,-6), B(3,-2)$ ಮತ್ತು $C(5,2)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ಮತ್ತು (x_3,y_3) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು

$$G(x\,,y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$



ಚಿತ್ರ 5.10

ಇಲ್ಲಿ, $(x_1\,,y_1) = (4,-6)$, $(x_2\,,y_2) = (3,-2)$, $(x_3,y_3) = (5\,,2)$

$\therefore$ $(4,-6), (3\,,-2)$ ಮತ್ತು $(5, 2)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು

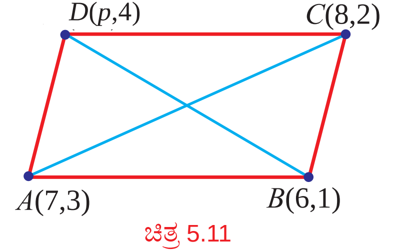
$$G(x\,,y) = G\left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6-2+2}{3}\right)$$

$$= G(4,-2).$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.6

$(7,3), (6,1), (8,2)$ ಮತ್ತು $(p,4)$ ಎಂಬವು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(7,3), B(6,1), C(8,2)$ ಮತ್ತು $D(p,4)$ ಆಗಿರಲಿ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.11

$\therefore$ AC ಕರ್ಣ ಮತ್ತು BD ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಅಧಿವ್ಯಾಪಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore\ p = 9$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.7

$A(4\,,0)$ ಮತ್ತು $B(0\,,6)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು C ಮತ್ತು O ಎಂಬುದು ಮೂಲಬಿಂದು ಆದರೆ, C ಬಿಂದುವು $\triangle OAB$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = C(2,3)$ ಆಗಿದೆ.

$P(x_1,y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2,y_2)$ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$O(0,0)$ ಮತ್ತು $C\,(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವು

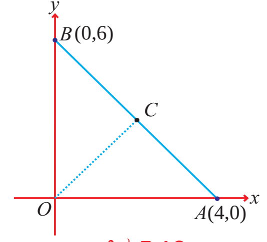
$$OC = \sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}\,.$$

$A(4,0)$ ಮತ್ತು $C(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ,

$$AC = \sqrt{(2-4)^2+(3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$B\,(0,6)$ ಮತ್ತು $C(2,3)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ,

$$BC = \sqrt{(2-0)^2+(3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$



ಚಿತ್ರ 5.12

$\therefore \quad OC = AC = BC$

$\therefore \quad C$ ಬಿಂದುವು $\triangle OAB$ ಯ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

ಸೂಚನೆ
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ OAB ಯಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಯು ಪರಿಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

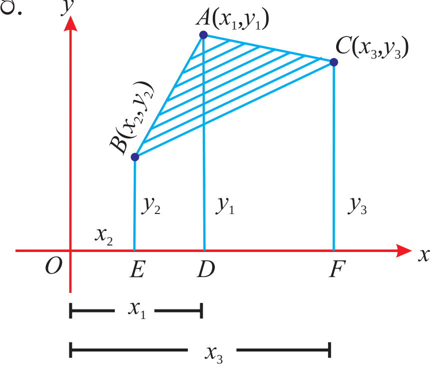
1. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(1,-1)$ ಮತ್ತು $(-5,3)$ (ii) $(0,0)$ ಮತ್ತು $(0,4)$
2. ಕೆಳಗಿನ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(1,3),(2,7)$ ಮತ್ತು $(12,-16)$ (ii) $(3,-5),(-7,4)$ ಮತ್ತು $(10,-2)$
3. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು $(-6, 4)$ ರಲ್ಲಿದೆ. ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ಅಂತ್ಯವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಅಂತ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು $(1, 3)$ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು $(-7, 6)$ ಮತ್ತು $(8, 5)$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ, $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(2,7)$ ಮತ್ತು $D(-2, 4)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(-6, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $3:2$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $(-3, 5)$ ಮತ್ತು $(4, -9)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $1:6$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. $AP = \frac{2}{9}AB$ ತೃಪ್ತಪಡಿಸುವಂತೆ AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು P ಆಗುವಂತೆ $A\,(-6,-5)$ ಮತ್ತು $B\,(-6, 4)$ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. $A(2,-2)$ ಮತ್ತು $B(-7, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $A(-4\,,0)$ ಮತ್ತು $B\,(0,6)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. $(6, 4)$ ಮತ್ತು $(1,-7)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು x-ಅಕ್ಷವು ವಿಭಜಿಸುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. $(-5, 1)$ ಮತ್ತು $(2\,, 3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು y-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ? ಹಾಗೂ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. $(1, -1)$, $(0, 4)$ ಮತ್ತು $(-5, 3)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.3 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Area of a triangle)

ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜವು ABC ಆಗಿರಲಿ.

AD, BE ಮತ್ತು CF ರೇಖೆಗಳನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.13

ಚಿತ್ರದಿಂದ, $ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$ ಮತ್ತು

$EF = x_3 - x_2$.

ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $ABED$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
+ $ADFC$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
− $BEFC$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

$\therefore$ ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.

> ΔABC ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಆದರೆ,
>
> ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.

ಸೂಚನೆ

> ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.
>
> $\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.
>
> (ಅಥವಾ) $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು.

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ತುಂಬಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಕರಣವು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ΔABC ಯ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

x_1y_2, x_2y_3 ಮತ್ತು x_3y_1 ಕರ್ಣ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ರೇಖಾ ಬಾಣಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೂಡಿರಿ.

$x_2y_1,\ x_3y_2$ ಮತ್ತು x_1y_3 ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಚುಕ್ಕೆ ಬಾಣಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕೂಡಿರಿ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\,y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ಪಡೆಯಲು ಹಿಂದಿನದರಿಂದ ಈಗಿನದನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

ಸೂಚನೆ

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ.

(i) ಕರಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(ii) ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರವು ಋಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

(iii) ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\,y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

5.4 ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಏಕರೇಖಾಗತೆ (Collinearity of three points)

ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವು ಕಂಡುಬಂದರೆ, ಆ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದಾದರೆ, ಅವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$

$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ABC$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

5.5 ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Area of the Quadrilateral)

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(x_1,y_1), B(x_2, y_2), C(x_3,y_3)$ ಮತ್ತು $D(x_4, y_4)$ ಆಗಿರಲಿ.

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \Delta ABD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $+ \Delta BCD$ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

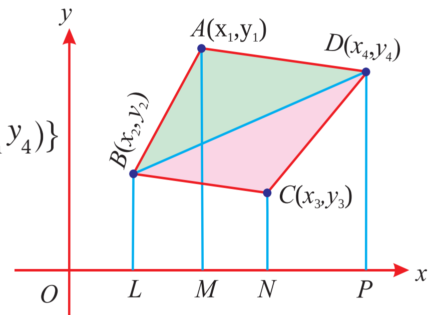
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_4y_2 + x_1y_4)\}$$
$$+ \frac{1}{2}\{(x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_4)\}$$

$\therefore$ $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$$

ಅಥವಾ

$\frac{1}{2}\{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\}$ ಚ.ಮಾನಗಳು



ಚಿತ್ರ 5.14

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಕರಣವು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ಮತ್ತು $D(x_4, y_4)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಳಸಿದ ತಂತ್ರವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ.

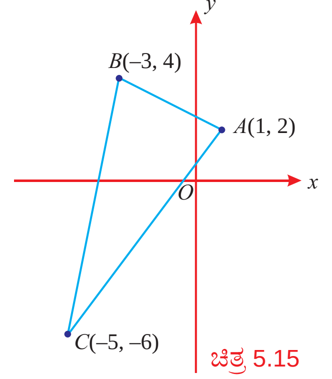
$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{Bmatrix}.$$

ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ $\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.8

$(1, 2)$, $(-3, 4)$ ಮತ್ತು $(-5, -6)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ



ಚಿತ್ರ 5.15

ಕರಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಶೃಂಗಗಳು $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ ಮತ್ತು $C(-5, -6)$ ಆಗಿರಲಿ.

ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}$

$= \frac{1}{2}\{(4 + 18 - 10) - (-6 - 20 - 6)\}$

$= \frac{1}{2}\{12 + 32\} = 22$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{Bmatrix}$

ಉದಾಹರಣೆ 5.9

ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 68 ಚದರ ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು $A(6, 7)$, $B(-4, 1)$ ಮತ್ತು $C(a, -9)$ ಆದರೆ, a ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$\frac{1}{2}\{(6 + 36 + 7a) - (-28 + a - 54)\} = 68$

$\Longrightarrow (42 + 7a) - (a - 82) = 136$

$\Longrightarrow 6a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$

ಉದಾಹರಣೆ 5.10

$A(2, 3)$, $B(4, 0)$ ಮತ್ತು $C(6, -3)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2}\{(0 - 12 + 18) - (12 + 0 - 6)\}$

$= \frac{1}{2}\{6 - 6\} = 0.$

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.11

$(a, 0)$ ಮತ್ತು $(0, b)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು $P(x, y)$ ಆದರೆ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $a, b \neq 0$.

ಪರಿಹಾರ $(x, y), (a, 0)$ ಮತ್ತು $(0, b)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

$\therefore$ ಅವುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\Longrightarrow \quad ab - bx - ay = 0$

ಬಳಸಿ: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$

$\therefore \quad bx + ay = ab$

ಎರಡೂ ಕಡೆಯನ್ನು ab ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

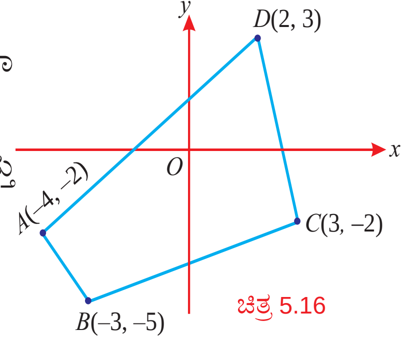
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad \text{ಇಲ್ಲಿ } a, b \neq 0.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.12

$(-4, -2), (-3, -5), (3, -2)$ ಮತ್ತು $(2, 3)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕರಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಶೃಂಗಗಳು $A(-4, -2)$, $B(-3, -5)$, $C(3, -2)$ ಮತ್ತು $D(2, 3)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.16

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2}\{(20 + 6 + 9 - 4) - (6 - 15 - 4 - 12)\}$

$= \frac{1}{2}\{31 + 25\} = 28$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{Bmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $(0, 0), (3, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 2)$ (ii) $(5, 2), (3, -5)$ ಮತ್ತು $(-5, -1)$

   (iii) $(-4, -5), (4, 5)$ ಮತ್ತು $(-1, -6)$

2. ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶೃಂಗಗಳು	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಚದರ ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)
(i) $(0, 0), (4, a), (6, 4)$	17
(ii) $(a, a), (4, 5), (6, -1)$	9
(iii) $(a, -3), (3, a), (-1, 5)$	12

3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

(i) $(4, 3), (1, 2)$ ಮತ್ತು $(-2, 1)$ (ii) $(-2, -2), (-6, -2)$ ಮತ್ತು $(-2, 2)$

(iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right), (6, -2)$ ಮತ್ತು $(-3, 4)$

4. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(k, -1), (2, 1)$ ಮತ್ತು $(4, 5)$ (ii) $(2, -5), (3, -4)$ ಮತ್ತು $(9, k)$

(iii) $(k, k), (2, 3)$ ಮತ್ತು $(4, -1)$

5. ಕೆಳಗಿನ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(6, 9), (7, 4), (4, 2)$ ಮತ್ತು $(3, 7)$ (ii) $(-3, 4), (-5, -6), (4, -1)$ ಮತ್ತು $(1, 2)$

(iii) $(-4, 5), (0, 7), (5, -5)$ ಮತ್ತು $(-4, -2)$

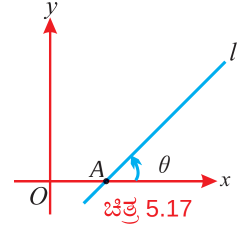
6. $(h, 0), (a, b)$ ಮತ್ತು $(0, k)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ (ಇಲ್ಲಿ $h, k \neq 0$) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $(0, -1), (2, 1)$ ಮತ್ತು $(0, 3)$ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ರಚಿತವಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.6 ಸರಳರೇಖೆ (Straight Lines)

5.6.1 ಓರೆಯ ಕೋನ (Angle of Inclination)

l ಸರಳರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಧನಾತ್ಮಕ x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು l ರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುವ ಕೋನವನ್ನು l ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.17

ಗಮನಿಸಿ

l ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ,

(i) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(ii) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆಗಳಿಗೆ, $\theta = 0^\circ$ ಅಥವಾ 180° ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖೆಗಳಿಗೆ, $\theta = 90^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಸರಳರೇಖೆಯು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದ್ದು, x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದು A ನಲ್ಲಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಅಂತಿಮವಾಗಿ x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ಆರಂಭಿಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು 0° ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5.6.2 ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆ (Slope of a straight line)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಲಂಬರೇಖೆಯಲ್ಲದ ಸರಳರೇಖೆ l ನ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, $\tan\theta$ ಎಂಬುದನ್ನು ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು m ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore\ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ,\ \theta \neq 90^\circ$ ಗೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) x-ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) $\tan 90^0$ ನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, y-ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುವಾಗ ಅದು ಲಂಬರೇಖೆಯಲ್ಲದ ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದರ್ಥ.

(iii) θ ಎಂಬುದು ಲಘುಕೋನವಾದರೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, θ ಎಂಬುದು ವಿಶಾಲಕೋನವಾದರೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

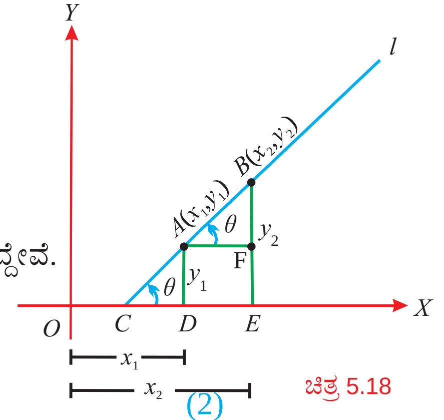
5.6.3 ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆ (Slope of a straight line when any two points on the line are given)

ಓರೆಯ ಕೋನ θ ಆಗಿರುವ l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \neq 90^\circ$.

AB ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತಿರಲಿ.

l ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$. (1)

x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ AD ಮತ್ತು BE ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ A ನಿಂದ BE ಗೆ AF ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.18

ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$

ಮತ್ತು $BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$

ಹಾಗೂ $\angle DCA = \angle FAB = \theta$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಲಂಬಕೋನ ΔABF ರಲ್ಲಿ,

$x_1 \neq x_2$ ಆದರೆ, $\tan\theta = \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, ಪ್ರವಣತೆ, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

(x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $\theta \neq 90^\circ$ ಆದಂತೆ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. ಇಲ್ಲಿ, $x_1 \neq x_2$

ಸೂಚನೆ

(x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y \text{ ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆ}}{x \text{ ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆ}}$ ಎಂದೂ ಅರ್ಥೈಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

5.6.4 ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿಬಂಧನೆ
(Condition for parallel lines in terms of their slopes)

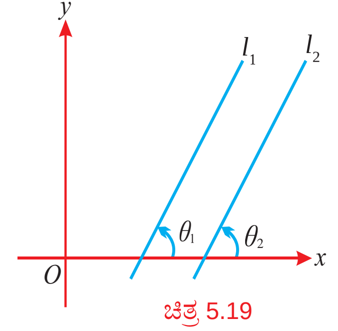
ಪ್ರವಣತೆಗಳು m_1 ಮತ್ತು m_2 ಹಾಗೂ ಓರೆಯ ಕೋನಗಳು θ_1 ಮತ್ತು θ_2 ಹೊಂದಿರುವ ಕ್ರಮವಾಗಿ l_1 ಮತ್ತು l_2 ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

l_1 ಮತ್ತು l_2 ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, θ_1 ಮತ್ತು θ_2 ಓರೆಯ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \quad \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad m_1 = m_2$$

$\therefore$ ಲಂಬವಲ್ಲದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮವಾದರೆ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 5.19

5.6.5 ಲಂಬವಾದ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ನಿಬಂಧನೆ
(Condition for perpendicular lines in terms of their slopes)

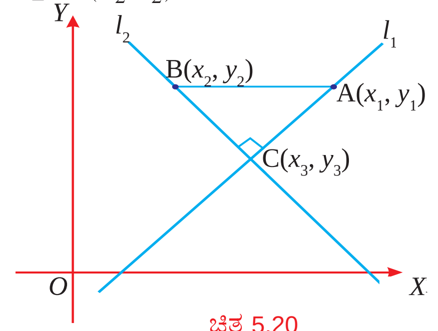
ಲಂಬವಾದ l_1 ಮತ್ತು l_2 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $A(x_1,y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2,y_2)$ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು m_1 ಮತ್ತು m_2 ಆಗಿರಲಿ.

ಅವುಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವು $C(x_3,y_3)$ ಆಗಿರಲಿ.

l_1 ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$.

l_2 ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.



ಚಿತ್ರ 5.20

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow \left(x_2 - x_3\right)^2 + \left(x_3 - x_1\right)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + \left(y_2 - y_3\right)^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1.$$

$$\Longrightarrow \quad m_1 m_2 = -1 \text{ ಅಥವಾ } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

m_1 ಮತ್ತು m_2 ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, $m_1 m_2 = -1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, $m_1 m_2 = -1$ ಆದರೆ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ

x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳೆಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, $m_1 m_2 = -1$ ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯು ಸತ್ಯವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, x-ಅಕ್ಷದ ಪ್ರವಣತೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.13

ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

$m = \tan\theta$. ಇಲ್ಲಿ, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \ne 90^\circ$.

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30^\circ$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.14

ಓರೆಯ ಕೋನವು 45° ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ರೇಖೆಯ ಓರೆಯ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$.

$$m = \tan 45^\circ \implies m = 1.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.15

$(3 , -2)$ ಮತ್ತು $(-1 , 4)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

$(3 , -2)$ ಮತ್ತು $(-1 , 4)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

$$m = \frac{4 + 2}{-1 - 3} = -\frac{3}{2}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 5.16

ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, $A(5, -2)$, $B(4, -1)$ ಮತ್ತು $C(1, 2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$A(5, -2)$ ಮತ್ತು $B(4, -1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ AB ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = \frac{-1 + 2}{4 - 5} = -1$.

$B(4, -1)$ ಮತ್ತು $C(1, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ BC ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = \frac{2 + 1}{1 - 4} = -1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= BC$ ಯ ಪ್ರವಣತೆ.

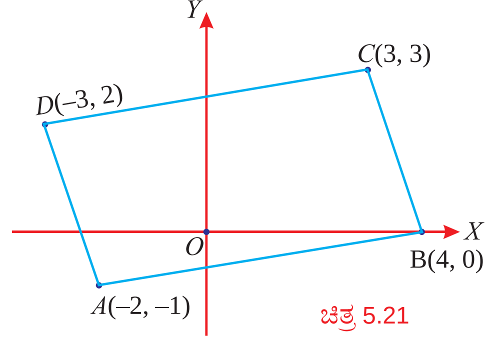
ಹಾಗೂ, B ಬಿಂದುವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, A , B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.17

ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕ್ರಮಾನುಗತವಾದ $(-2\ ,\ -1)$, $(4\ ,\ 0)$, $(3\ ,\ 3)$ ಮತ್ತು $(-3\ ,\ 2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಬಿಂದುಗಳು $A(-2\ ,\ -1)$, $B(4\ ,\ 0)$, $C(3\ ,\ 3)$ ಮತ್ತು $D(-3\ ,\ 2)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.21

AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{0+1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$

CD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{2-3}{-3-3} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $=$ CD ಯ ಪ್ರವಣತೆ

ಇದರಿಂದ, AB ಯು CD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. (1)

BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{3-0}{3-4} = -3$

AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{2+1}{-3+2} = -3$

$\therefore$ BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $=$ AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ

ಆದ್ದರಿಂದ, BC ಯು AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. (2)

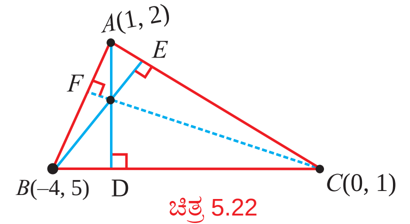
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\therefore$ $ABCD$ ಯು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.18

$\triangle ABC$ ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(1\ ,2)$, $B(-4\ ,5)$ ಮತ್ತು $C(0\ ,1)$ ಆಗಿವೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯ ಔನ್ನತ್ಯಗಳು AD, BE ಮತ್ತು CF ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.22

BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{1-5}{0+4} = -1$

AD ಔನ್ನತ್ಯವು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= 1$ $\quad \because m_1 m_2 = -1$

AC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{1-2}{0-1} = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, BE ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= -1$ $\quad \because BE \perp AC$

ಹಾಗೂ, AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{5-2}{-4-1} = -\dfrac{3}{5}$

$\therefore$ CF ನ ಪ್ರವಣತೆ $= \dfrac{5}{3}$ $\quad \because CF \perp AB$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0

2. ಕೆಳಗಿನ ಓರೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) 30° (ii) 60° (iii) 90°

3. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(3, -2)$ ಮತ್ತು $(7, 2)$ (ii) $(2, -4)$ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದು
   (iii) $(1+\sqrt{3}, 2)$ ಮತ್ತು $(3+\sqrt{3}, 4)$

4. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(1, 2)$ ಮತ್ತು $(2, 3)$ (ii) $(3, \sqrt{3})$ ಮತ್ತು $(0, 0)$
   (iii) (a, b) ಮತ್ತು $(-a, -b)$

5. $(0, -4)$ ಮತ್ತು $(8, 0)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಹಾಗೂ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $ABCD$ ಚೌಕದ AB ಬಾಹುವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ (ii) BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ (iii) AC ಕರ್ಣದ ಪ್ರವಣತೆ

7. ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ BC ಬಾಹುವು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ ಮತ್ತು BC ಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
   (i) $(2, 3)$, $(3, -1)$ ಮತ್ತು $(4, -5)$
   (ii) $(4, 1)$, $(-2, -3)$ ಮತ್ತು $(-5, -5)$ (iii) $(4, 4)$, $(-2, 6)$ ಮತ್ತು $(1, 5)$

9. $(a, 1)$, $(1, 2)$ ಮತ್ತು $(0, b+1)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $A(-2, 3)$ ಮತ್ತು $B(a, 5)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು $C(0, 5)$ ಮತ್ತು $D(-2, 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $A(0, 5)$ ಮತ್ತು $B(4, 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು $C(-1, -2)$ ಮತ್ತು $D(5, b)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. b ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(1, 8)$, $B(-2, 4)$, $C(8, -5)$. AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ M ಮತ್ತು N ಆದರೆ, MN ನ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ MN ಎಂಬುದು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

13. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು $(6, 7)$, $(2, -9)$ ಮತ್ತು $(-4, 1)$ ರಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇದರ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(-5, 7)$, $B(-4, -5)$ ಮತ್ತು $C(4, 5)$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಪ್ರವಣತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, $(1, 2), (-2, 2), (-4, -3)$ ಮತ್ತು $(-1, -3)$ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $A(-2,-4)$, $B(5,-1)$, $C(6,4)$ ಮತ್ತು $D(-1,1)$ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.6.6 ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ (Equation of a straight line)

ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು L ಆಗಿರಲಿ. x ಮತ್ತು y ಚರಾಂಶಗಳ ಮೊದಲ ಘಾತಾಂಕದ $px + qy + r = 0$ ಸಮೀಕರಣವು L ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಂದ ತೃಪ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುವ x ಮತ್ತು y ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳು L ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು L ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ L ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಅಂದರೆ, L ನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ವಿವರಿಸಬೇಕಿದೆ. ಈಗ L ಎಂಬುದು ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

(i) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆ (ii) ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖೆ (iii) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಲ್ಲದ ಊರ್ಧ್ವವೂ ಅಲ್ಲದ ರೇಖೆ

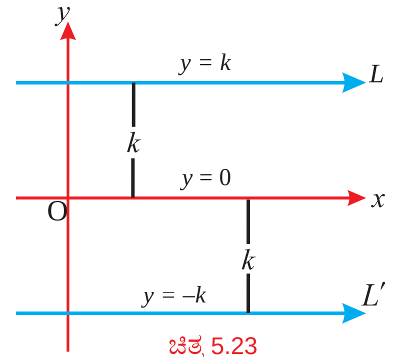
(i) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆ (Horizontal line): L ಎಂಬುದು ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ (a) L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷ ಆಗಿದ್ದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು L ನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. $y = 0$ ಆದಾಗ x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.
ಆದ್ದರಿಂದ, $y = 0$ ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ x-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $y = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಸಂಗತಿ (b) L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆ. ಅಂದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ. y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು L ನ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5.23

$\therefore$ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = k$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, k ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$k > 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. $k < 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $k = 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷವೇ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(ii) ಊರ್ಧ್ವ (ಲಂಬ) ರೇಖೆ (Vertical line): L ಎಂಬುದು ಒಂದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

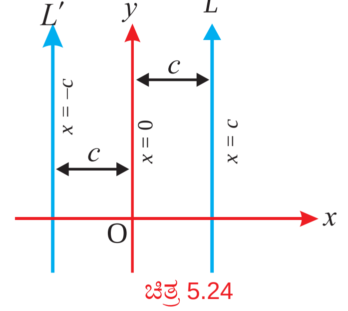
ಸಂಗತಿ (a) L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷ ಆಗಿರಲಿ. $x = 0$ ಆದರೆ, ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ (x, y) ಬಿಂದುವು L ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 0$ ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ y-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $x = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಸಂಗತಿ (b) L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು L ನಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5.24

$\therefore$ y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = c$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, c ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ.

$c > 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷದ ಬಲಕ್ಕೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

$c < 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷದ ಎಡಕ್ಕೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

$c = 0$ ಆದರೆ, L ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

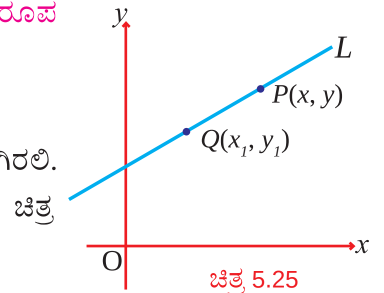
(iii) ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಲ್ಲದ ಊರ್ಧ್ವವೂ ಅಲ್ಲದ ರೇಖೆ: L ಎಂಬುದು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಲ್ಲದ ಊರ್ಧ್ವವೂ ಅಲ್ಲದ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು L ನ್ನು ಸಮೀರಣದಿಂದ ಹೇಗೆ ವಿವರಿಸುವುದು? θ ಎಂಬುದು ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. θ ಮತ್ತು L ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, L ನ್ನು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

> ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆ L ನ ಪ್ರವಣತೆ m ನ್ನು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.
>
> (i) θ ಎಂಬ ಓರೆಯ ಕೋನವನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, $m = \tan\theta$.
>
> (ii) L ಮೇಲಿನ ಎರಡು (x_1, y_1), (x_2, y_2) ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
>
> (iii) L ಎಂಬುದು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, $m = 0$. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ.

ಈಗ L ಎಂಬುದು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯಲ್ಲದ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಸಿರಿ. (a) ಪ್ರವಣತೆ–ಬಿಂದು ರೂಪ (b) ಎರಡು–ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪ (c) ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪ (d) ಛೇದಕಗಳ ರೂಪ

(a) ಪ್ರವಣತೆ–ಬಿಂದು ರೂಪ (Slope-Point form)

L ನ ಪ್ರವಣತೆಯು m ಮತ್ತು L ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು $Q(x_1, y_1)$ ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಎಂಬುದು L ಮೇಲಿನ Q ಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಒಂದು ಸ್ವೇಚ್ಛಾ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,



ಚಿತ್ರ 5.25

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಪ್ರವಣತೆ m ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

L ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ (x, y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ, $y - y_1 = m(x - x_1)$ (1)

ಗಮನಿಸಿ

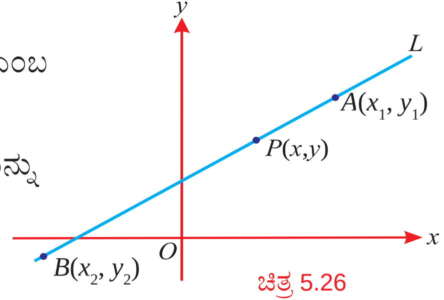
(i) x ಮತ್ತು y ಚರಾಂಶಗಳಿಂದಾದ ಮೊದಲ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ (1) ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಮತ್ತು y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಿಂದ ತೃಪ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಗೊಳಿಸುವ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು L ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(ii) (1) ರ ಸಮೀಕರಣವು L ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆಯು x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಾದ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ m ಎಂಬುದು ಪ್ರವಣತೆಯಾಗಿದೆ.

(b) ಎರಡು–ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪ (Two-Points form)

ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ L ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

L ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, L ನ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ (1) ನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.26

L ನ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ಇಲ್ಲಿ, L ಎಂಬುದು ಊರ್ಧ್ವವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $x_2 \neq x_1$.

ಸೂತ್ರ (1) ರಿಂದ,

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \Longrightarrow L \text{ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ } (x, y) \text{ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (2)$$

ಸೂಚನೆ

L ನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು, (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ (x_2, y_2) ಬಿಂದುವನ್ನೂ ನಾವು ಬಳಸಬಹುದು.

(c) ಪ್ರವಣತೆ – ಛೇದಕ ರೂಪ (Slope-Intercept form)

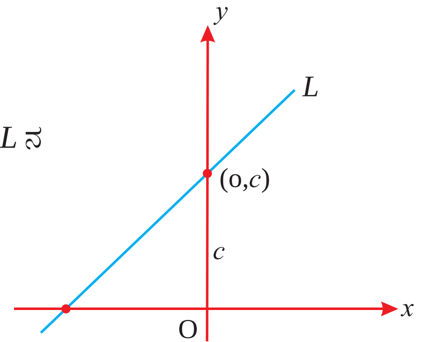
L ನ ಪ್ರವಣತೆ m ಮತ್ತು L ನ y-ಛೇದಕವು c ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.

c ಎಂಬುದು y-ಛೇದಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $(0, c)$ ಬಿಂದುವು L ನ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

$(x_1, y_1) = (0, c)$ ರೊಂದಿಗೆ (1) ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$y - c = m(x - 0)$

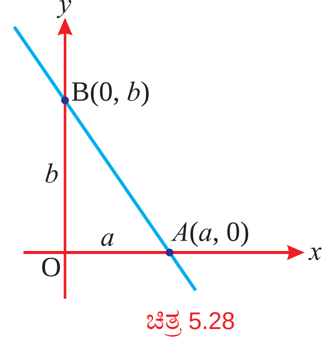
$\Longrightarrow L$ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ $y = mx + c$ (3)



ಚಿತ್ರ 5.27

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪ**ದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = mx + c$ ಆಗಿದೆ.

(d) ಛೇದಕ ರೂಪ (Intercepts form)



ಚಿತ್ರ 5.28

L ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $A(a, 0)$ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು $B(0, b)$ ರಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ.

AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $m = -\frac{b}{a}$.

(1) ರಿಂದ, $\quad y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$

$\Longrightarrow \quad ay = -bx + ab$

$$bx + ay = ab$$

ab ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\therefore$ x-ಛೇದಕವು a ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು b ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

L ನ ಎಲ್ಲಾ (x , y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (4)

ಸೂಚನೆ

(i) m ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ L ರೇಖೆಯು ಉಂಟುಮಾಡಿದ x-ಛೇದಕವು d ಆದರೆ, ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = m(x - d)$ ಆಗಿದೆ.

(ii) $y = mx$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ($m \neq 0$ ಗೆ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳೆರಡೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ.)

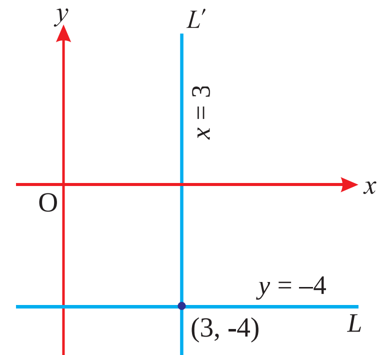
(iii) (1), (2) ಮತ್ತು (4) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (3) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

(iv) (1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ರಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು L ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ (x , y) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ $px + qy + r = 0$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5.19

ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $(3, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $(3, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಹಾಗೂ x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ L ಮತ್ತು L' ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.29

L ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ y-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು -4 ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, L ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = -4$ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, L' ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು 3 ಆಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ, L' ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = 3$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.20

ಓರೆ ಕೋನವು 45° ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು $\frac{2}{5}$ ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

y-ಛೇದಕವು $c = \frac{2}{5}$

ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪದಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = mx + c$$

$$y = x + \frac{2}{5} \implies y = \frac{5x+2}{5}$$

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $5x - 5y + 2 = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.21

ಪ್ರವಣತೆ $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $(-2,3)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಪ್ರವಣತೆ $m = \frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಬಿಂದು $(x_1, y_1) = (-2,3)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರವಣತೆ–ಬಿಂದು ಸೂತ್ರದಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\implies y - 3 = \frac{1}{3}(x+2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x - 3y + 11 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.22

$(-1,1)$ ಮತ್ತು $(2,-4)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ ಮತ್ತು $x_2 = 2$, $y_2 = -4$.

ಎರಡು–ಬಿಂದುಗಳ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\implies \frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+1}{2+1}$$

$$\implies 3y - 3 = -5x - 5$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $5x + 3y + 2 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.23

$\triangle ABC$ ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$ ಮತ್ತು $C(4, 5)$ ಆಗಿವೆ. A ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು D ಆಗಿರಲಿ.

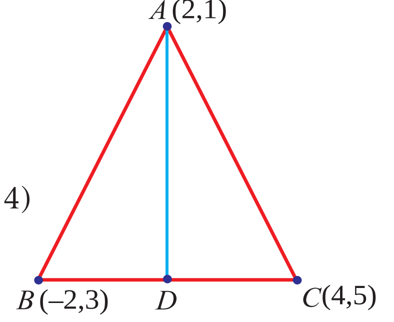
$\therefore$ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2}$ $\because (x_1, y_1) = (2,1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2) = (1,4)$

$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$

$\therefore$ $3x + y - 7 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.30

ಉದಾಹರಣೆ 5.24

ಸರಳರೇಖೆಯ x-ಛೇದಕ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{4}$ ಆದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸರಳರೇಖೆಯ x-ಛೇದಕ, $a = \frac{2}{3}$

ಸರಳರೇಖೆಯ y-ಛೇದಕ, $b = \frac{3}{4}$

ಛೇದಕ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$\implies \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $9x + 8y - 6 = 0$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.25

ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 5 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು $(6, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ x-ಛೇದಕ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ.

ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತ $a + b = 5$

$\implies$ $b = 5 - a$

ಛೇದಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\implies \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(5-a)x + ay = a(5-a)$ (1)

(1) ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು $(6, -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ,

$$(5-a)6+a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow \quad a^2-13a+30 = 0.$$

ಅಂದರೆ, $(a-3)(a-10) = 0$

$\therefore \quad a = 3$ ಅಥವಾ $a = 10$

$a = 3$ ಆದಾಗ, (1) $\Longrightarrow \quad (5-3)x+3y = 3(5-3)$

$\Longrightarrow \quad 2x+3y = 6$ (2)

$a = 10$ ಆದಾಗ, (1) $\Longrightarrow (5-10)x+10y = 10(5-10)$

$\Longrightarrow \quad -5x+10y = -50$

ಅಂದರೆ, $x-2y-10 = 0.$ (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $2x+3y=6$ ಮತ್ತು $x-2y-10=0$ ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ, x-ಅಕ್ಷದಿಂದ 5 ಮೂಲಮಾನಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $(-5,-2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ಪ್ರವಣತೆಯು -3 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು 4
   (ii) ಓರೆ ಕೋನವು 60^0 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು 3

4. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 3 ಮೂಲಮಾನಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ, θ ಎಂಬುದು ಓರೆಯ ಕೋನ.

5. (i) $y = x+1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x-2y+1 = 0$ (iv) $10x+15y+6=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) ಪ್ರವಣತೆಯು -4 ಮತ್ತು $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ
   (ii) ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $(5, -4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ

7. ಓರೆ ಕೋನವು 30^0 ಆಗಿರುವ, $(4, 2)$ ಮತ್ತು $(3, 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(-2, 5)$ ಮತ್ತು $(3, 6)$ (ii) $(0, -6)$ ಮತ್ತು $(-8, 2)$

9. $P(1, -3)$, $Q(-2, 5)$ ಮತ್ತು $R(-3, 4)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ PQR ತ್ರಿಭುಜದ R ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) (4, 2), (7, 5) ಮತ್ತು (9, 7) (ii) (1, 4), (3, −2) ಮತ್ತು (−3, 16)

11. ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 2 ಮತ್ತು 3 (ii) $-\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ ಮತ್ತು $-\frac{3}{4}$

12. (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$
ಸರಳರೇಖೆಗಳ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಛೇದಕಗಳು $3:2$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು (2, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ಛೇದಕಗಳು ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸಮವಾಗಿರುವ ಆದರೆ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು (5, −3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. x-ಛೇದಕವು y-ಛೇದಕದ ಮೂರರಷ್ಟಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (9, −1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು (3, 2) ಆದರೆ, AB ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. x-ಅಕ್ಷದ ಛೇದಕವು y-ಅಕ್ಷದ ಛೇದಕಕ್ಕಿಂತ 5 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (22, −6) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $ABCD$ ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು $A(3, 6)$ ಮತ್ತು $C(-1, 2)$ ಆದರೆ, BD ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{3}{2}$ ಆಗಿರುವ ಹಾಗೂ $A(-2, 6)$ ಮತ್ತು $B(3, -4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2:3$ ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.7 ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (General Form of Equation of a straight line)

$a \neq 0$ ಅಥವಾ $b \neq 0$ ಆಗುವಂತೆ a , b ಮತ್ತು c ಎಂಬವು ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿರುವಾಗ $ax + by + c = 0$ ಆದರ್ಶ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು $ax + by + c = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $ax + by + c = 0$ ರ ಪ್ರವಣತೆ

(ii) $ax + by + c = 0$ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

(iii) $ax + by + c = 0$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಹಾಗೂ

(iv) ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು

(i) $ax + by + c = 0$ ರ ಪ್ರವಣತೆ

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},\ b \neq 0$ (1)

(1) ನ್ನು $y = mx + k$ ಪ್ರವಣತೆ–ಛೇದಕ ರೂಪದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

ಪ್ರವಣತೆ, $m = -\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕ $= -\frac{c}{b}$

$\therefore\ ax + by + c = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ

ಪ್ರವಣತೆ $m = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು $-\frac{\text{ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಪದ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}$ ಆಗಿದೆ.

(ii) $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯವೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು k ನ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $ax + by + k = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

(iii) $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು k ನ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $bx - ay + k = 0$ ಆಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ

ಸಹಗುಣಕಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರದ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

(i) ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ಲಂಬವಾದರೆ, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

(iv) ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.26

$3x + 2y - 12 = 0$ ಮತ್ತು $6x + 4y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $3x + 2y - 12 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\frac{3}{2}$

ಹೀಗೆಯೇ, $6x + 4y + 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\therefore\ m_1 = m_2$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.27

$x + 2y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $2x - y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $x + 2y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_1 = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\frac{1}{2}$

$2x - y + 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m_2 = -\frac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = \frac{-2}{-1} = 2$

ಪ್ರವಣತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $m_1 m_2 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

$\therefore$ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.28

(2, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x - 8y + 13 = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $x - 8y + 13 = 0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $x - 8y + k = 0$.

ಇದು (2, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ,

$$2 - 8(5) + k = 0 \implies k = 38$$

$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x - 8y + 38 = 0$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5.29

$\triangle ABC$ ಯ ಶೃಂಗಗಳು $A(2, 1)$, $B(6, -1)$ ಮತ್ತು $C(4, 11)$. A ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಔನ್ನತ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

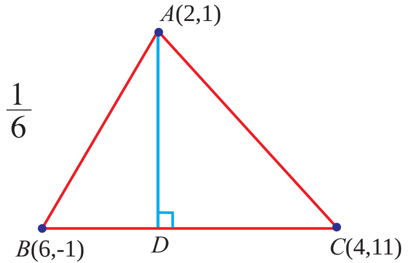
ಪರಿಹಾರ BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \frac{11 + 1}{4 - 6} = -6$

AD ರೇಖೆಯು BC ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, AD ಯ ಪ್ರವಣತೆ $= \frac{1}{6}$

$\therefore$ AD ಯ ಸಮೀಕರಣವು $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \implies 6y - 6 = x - 2$$

$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x - 6y + 4 = 0$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 5.31

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $3x + 4y - 6 = 0$ (ii) $y = 7x + 6$ (iii) $4x = 5y + 3$.

2. $x + 2y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 6y + 2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $3x - 5y + 7 = 0$ ಮತ್ತು $15x + 9y + 4 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\frac{y}{2} = x - p$ ಮತ್ತು $ax + 5 = 3y$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $5x - 2y - 9 = 0$ ಮತ್ತು $ay + 2x - 11 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $8px+(2-3p)y+1=0$ ಮತ್ತು $px+8y-7=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾದರೆ, p ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $(h,3)$ ಮತ್ತು $(4,\ 1)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು $7x-9y-19=0$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವಂತೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, h ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $(1,\ -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $3x-y+7=0$ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $(1,\ -2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x-2y+3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $(3,\ 4)$ ಮತ್ತು $(-1,\ 2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $(1,\ 2)$ ಮತ್ತು $(2,\ 1)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಹಾಗೂ $2x+y-3=0$ ಮತ್ತು $5x+y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $3x-5y+11=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಹಾಗೂ $5x-6y=1$ ಮತ್ತು $3x+2y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $2x+y-4=0$ ಮತ್ತು $x-2y+3=0$ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ $3x-y+9=0$ ಮತ್ತು $x+2y=4$ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(2,\ -4)$, $B(3,\ 3)$ ಮತ್ತು $C(-1,\ 5)$ ಆದರೆ, B ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಔನ್ನತ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $A(-4,4)$, $B(8,4)$ ಮತ್ತು $C(8,10)$ ಆದರೆ, A ಶೃಂಗದಿಂದ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x+2y=13$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x+2y=7$ ಮತ್ತು $2x+y=8$ ಆಗಿದ್ದು, $(0,\ -2)$ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $2x-3y+4=0$, $x-2y+3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ $(3,\ -2)$ ಮತ್ತು $(-5,\ 8)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. PQR ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $PQ=PR$. QR ಪಾದವು x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ, P ಬಿಂದುವು y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಮತ್ತು PQ ನ ಸಮೀಕರಣವು $2x-3y+9=0$ ಆಗಿದೆ. PR ನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.6

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. $(a,-b)$ ಮತ್ತು $(3a,5b)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

   (A) $(-a,2b)$ (B) $(2a,4b)$ (C) $(2a,2b)$ (D) $(-a,-3b)$

2. $A(1,-3)$ ಮತ್ತು $B(-3,9)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 1:3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವು

   (A) $(2,1)$ (B) $(0,0)$ (C) $\left(\frac{5}{3},2\right)$ (D) $(1,-2)$

3. $A(3,4)$ ಮತ್ತು $B(14,-3)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದುವು ವಿಭಜಿಸುವ ಅನುಪಾತ

   (A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1

4. $(-2,-5)$, $(-2,12)$ ಮತ್ತು $(10,-1)$ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ

   (A) $(6,6)$ (B) $(4,4)$ (C) $(3,3)$ (D) $(2,2)$

5. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಶೃಂಗಗಳು $(1,2)$, $(4,6)$, $(x,6)$ ಮತ್ತು $(3,2)$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ

   (A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. $(0,0)$, $(2,0)$ ಮತ್ತು $(0,2)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) 1 ಚ.ಮಾನಗಳು (B) 2 ಚ.ಮಾನಗಳು (C) 4 ಚ.ಮಾನಗಳು (D) 8 ಚ.ಮಾನಗಳು

7. $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ ಮತ್ತು $(1,0)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) 3 ಚ.ಮಾನಗಳು (B) 2 ಚ.ಮಾನಗಳು (C) 4 ಚ.ಮಾನಗಳು (D) 1 ಚ.ಮಾನ

8. x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓರೆ ಕೋನವು

   (A) 0° (B) 60° (C) 45° (D) 90°

9. $(3,-2)$ ಮತ್ತು $(-1,a)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $-\frac{3}{2}$ ಆದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯು

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2,6)$ ಮತ್ತು $(4,8)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

    (A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x-y-2=0$ ಮತ್ತು $2x+y-9=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುವು

    (A) $(-1,7)$ (B) $(7,1)$ (C) $(1,7)$ (D) $(-1,-7)$

12. $4x+3y-12=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವು

    (A) $(3,0)$ (B) $(0,4)$ (C) $(3,4)$ (D) $(0,-4)$

13. $7y-2x=11$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು

    (A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. $(2,-7)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

    (A) $x=2$ (B) $x=-7$ (C) $y=-7$ (D) $y=2$

15. $2x - 3y + 6 = 0$ ರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y-ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) $-3, 2$ (D) $3, -2$

16. ಕೇಂದ್ರವು $(-6, 4)$ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ತುದಿಯು $(-12, 8)$ ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯು

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. $2x + 3y - 7 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು $(-2, 5)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. (2, 5), (4, 6) ಮತ್ತು (a, a) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, a ನ ಬೆಲೆಯು

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ ಸರಳರೇಖೆಯು $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. ಪ್ರವಣತೆಯು 3 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು -4 ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$ ಮತ್ತು $x = -4$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದು

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0$ ಮತ್ತು $2x + ky = 5$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, k ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ಆಗಿದೆ.
- $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P ಬಿಂದುವು $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$ ಆಗಿದೆ.
- $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $l : m$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ Q ಬಿಂದುವು $\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$ ಆಗಿದೆ.
- (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x_3, y_3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು
$$\frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಾಗತವಾದರೆ,
  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (ಅಥವಾ)
  (ii) AB ಯ ಪ್ರವಣತೆ $=$ BC ಯ ಪ್ರವಣತೆ ಅಥವಾ AC ಯ ಪ್ರವಣತೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.
- ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು θ ಆದರೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು $m = \tan\theta$.
- (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು
  $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ಆಗಿದೆ.
- $ax + by + c = 0$ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $m = -\dfrac{x \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}}{y \text{ ನ ಸಹಗುಣಕ}} = -\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.
- ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ (ಅಡ್ಡ) ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ.
- ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.
- ಎರಡು ಊರ್ಧ್ವವಲ್ಲದ ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಪ್ರವಣತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $m_1 m_2 = -1$. ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಸರಳರೇಖೆ	ಸಮೀಕರಣ
1.	x-ಅಕ್ಷ	$y = 0$
2.	y-ಅಕ್ಷ	$x = 0$
3.	x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ	$y = k$
4.	y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ ಗೆ ಸಮಾಂತರ	$ax+by+k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ ಗೆ ಲಂಬ	$bx-ay+k = 0$
	ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು	**ಸಮೀಕರಣ**
1.	ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು	$y = mx$
2.	ಪ್ರವಣತೆ m, y-ಛೇದಕ c	$y = mx + c$
3.	ಪ್ರವಣತೆ m, ಒಂದು ಬಿಂದು (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x - x_1)$
4.	(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x-ಛೇದಕವು a, y-ಛೇದಕವು b	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

6 ರೇಖಾಗಣಿತ

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - Pythagoras

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ
- ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ
- ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು
- ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ
- ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ



ಯೂಕ್ಲಿಡ್
(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 300)
ಗ್ರೀಕ್

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರ 'ಅಂಶಗಳು' (ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್) ಎಂಬುದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಪ್ರಬಲ ವರ್ಚಸ್ಸಿನ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸಲು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರ ಅಲ್ಗಾರಿದಮ್ ಎಂಬುದು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥವಾದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

6.1 ಪೀಠಿಕೆ

ರೇಖಾಗಣಿತವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ವಿಭಾಗವಾಗಿದ್ದು, ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆಗಳ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೇ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಂದ ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕಾರಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನವು ವ್ಯಕ್ತಿಯು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಚಿಂತಿಸುವಂತೆ ಅವರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಕ್ರಿ. ಪೂ. 300ರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪಿತಾಮಹ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಅಥವಾ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಕೆಲವು ಸ್ವ–ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರಿತ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಊಹೆಗಳು ಮತ್ತು ಹಿಂದೆ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕತೆಗಳಿಂದ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಚಿಂತನೆಯ ಹೊಸ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದರು.

ಇಂಜಿನೀಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪಗಳಂತಹ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿರುವ ಹಲವಾರು ಸೇತುವೆಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಬಾಳಿಕೆ ಬರುವಂತೆ ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಸೇತುವೆಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಒತ್ತಡವನ್ನು ತಡೆಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಕಟ್ಟಡಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಎರಡು ಪಾತ್ರಗಳನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ; ರಚನೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಬಾಳಿಕೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸುವುದು. ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಕಾರಗಳ ಸಮರ್ಪಕ ಬಳಕೆಯು ಕಟ್ಟಡಗಳು ಮತ್ತು ತಾಜ್‌ಮಹಲ್‌ಗಳಂತಹ ಇತರೆ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲರ ಮೆಚ್ಚುಗೆಗೆ ಪಾತ್ರವಾಗುವ ಹೆಗ್ಗುರುತುಗಳಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹಲವಾರು ಶಾಖೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತರಿಸುವಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳು ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯವು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಥೇಲ್ಸ್‌ರ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಯಾವುದೇ ಕೋನ XAY ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ ಮೂಲಮಾನ (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಆಗುವಂತೆ AX ಭುಜದ ಮೇಲೆ P_1, P_2, D, P_3 ಮತ್ತು B (ಐದು ಬಿಂದುಗಳೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. B ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ AY ಭುಜವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. D ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ AC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

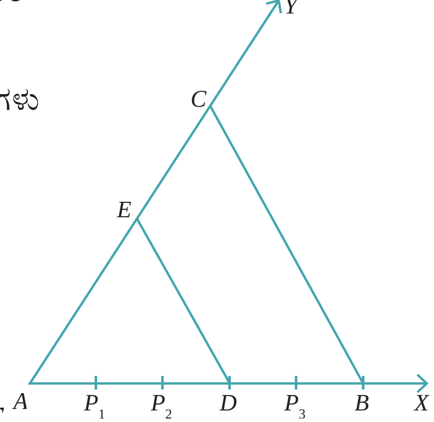
ಮತ್ತು $DB = DP_3 + P_3B = 2$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$

AE ಮತ್ತು EC ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔABC ಯಲ್ಲಿ $DE \parallel BC$ ಆದರೆ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



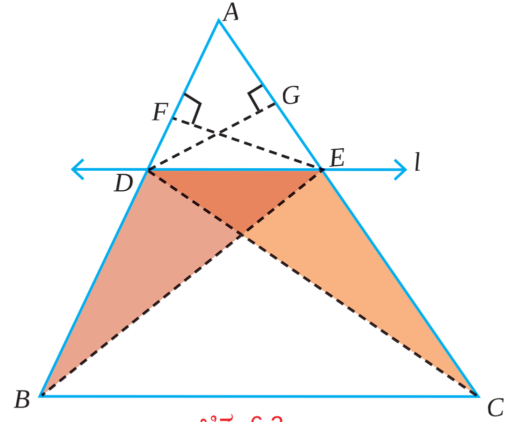
ಚಿತ್ರ 6.1

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವಾ ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಾವು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

6.2 ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಮತ್ತು ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳು (Basic proportionality and Angle Bisector theorems)

ಪ್ರಮೇಯ 6.1 **ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವಾ ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ**

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.2

ದತ್ತ: ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ l ಸರಳ ರೇಖೆಯು ABಯನ್ನು Dನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು Eನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನಿಯ: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ರಚನೆ: BE, CD ಸೇರಿಸಿರಿ. $EF \perp AB$ ಮತ್ತು $DG \perp CA$ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ

$EF \perp AB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ADE ಮತ್ತು DBE ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಎತ್ತರವು EF ಆಗಿದೆ.

(ΔADE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ $= \frac{1}{2} AD \times EF$ ಮತ್ತು

(ΔDBE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ $= \frac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DBE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

ಹೀಗೆಯೇ,

$$\frac{\Delta ADE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DCE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

ಆದರೆ ΔDBE ಮತ್ತು ΔDCE ಗಳು DE ಎಂಬ ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿವೆ ಹಾಗೂ BC ಮತ್ತು DE ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

$\therefore$ (ΔDBE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=$ (ΔDCE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉಪ ಪ್ರಮೇಯ

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ DE ಸರಳರೇಖೆಯು AB ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, (i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

ಸಾಧನೆ

(i) ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(ii) ಹೀಗೆಯೇ,

$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಆದರೆ, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

ಇದನ್ನು ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$

ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊದಿಂದ

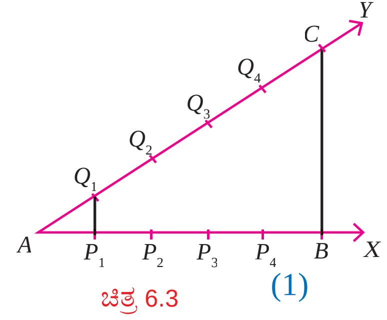
ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗುವುದೇ? ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಯಾವುದೇ ಕೋನ XAY ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ ಮೂಲಮಾನ (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಆಗಿರುವಂತೆ AX ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P_1, P_2, P_3, P_4 ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹೀಗೆಯೇ, $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ ಮೂಲಮಾನಗಳು (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಆಗಿರುವಂತೆ AY ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಈಗ P_1Q_1 ಮತ್ತು BC ಸೇರಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.3

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AQ_1}{Q_1C}$

P_1Q_1 ಮತ್ತು BC ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $P_1Q_1 \parallel BC$. (1)

ಹೀಗೆಯೇ, P_2Q_2, P_3Q_3 ಮತ್ತು P_4Q_4 ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ

$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $P_2Q_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $P_3Q_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1}$ ಮತ್ತು $P_4Q_4 \parallel BC$ (4)

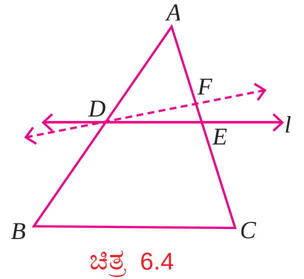
(1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.2

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.4

ದತ್ತ : l ರೇಖೆಯು ABC ತ್ರಿಭುಜದ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಆಗುವಂತೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. (1)

ಸಾಧನೀಯ : $DE \parallel BC$

ರಚನೆ : DE ಎಂಬುದು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ DF ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $DF \parallel BC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,
$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$$

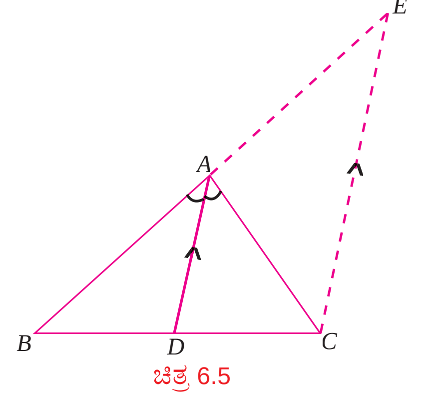
$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore\ FC = EC$$

ಇದು F ಮತ್ತು E ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore\ DE \parallel BC$.

ಪ್ರಮೇಯ 6.3 ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ (Angle Bisector Theorem)

ತ್ರಿಭುಜದ ಆಂತರಿಕ (ಬಾಹ್ಯ) ಕೋನಾರ್ಧಕವು ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅನುಗುಣವಾದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ ***(i)*** (ಆಂತರಿಕವಾಗಿ)



ಚಿತ್ರ 6.5

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು, D ನಲ್ಲಿ BC ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

ರಚನೆ : CE ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ DA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ

$CE \parallel DA$ ಮತ್ತು AC ಯು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle DAC = \angle ACE$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) (1)

ಮತ್ತು $\angle BAD = \angle AEC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) (2)

AD ಯು $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\angle BAD = \angle DAC$ (3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ, $\angle ACE = \angle AEC$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ACE$ ಯಲ್ಲಿ $AE = AC$ (ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)

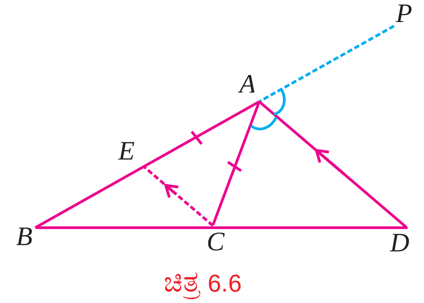
$\triangle BCE$ ಯಲ್ಲಿ, $CE \parallel DA$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (AE = AC)$$

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ ***(ii)*** (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) (ಈ ಭಾಗವು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ)



ಚಿತ್ರ 6.6

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕ ಮತ್ತು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

ರಚನೆ : AB ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ, DA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $CE \parallel DA$ ಮತ್ತು AC ಯು ಅಡ್ಡರೇಖೆ (ಛೇದಕ) ಆಗಿದೆ.

$\angle ECA = \angle CAD$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) (1)

$CE \parallel DA$ ಮತ್ತು BP ಯು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

$$\angle CEA = \angle DAP \quad \text{(ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)} \qquad (2)$$

ಆದರೆ AD ಯು $\angle CAP$ ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$$\angle CAD = \angle DAP \qquad (3)$$

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ,

$$\angle CEA = \angle ECA$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ECA$ ಯಲ್ಲಿ, $AC = AE$ (ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)

$\triangle BDA$ ರಲ್ಲಿ, $EC \parallel AD$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ)}$$

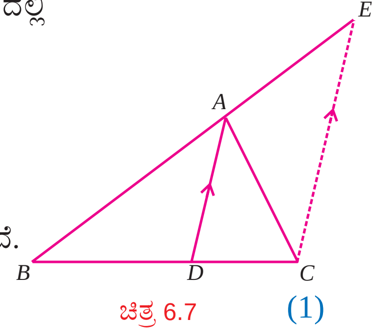
$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad (AE = AC)$$

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.4

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ಇನ್ನುಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ರೇಖೆಯು ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಕೋನವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ ***(i) :*** (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ)



ಚಿತ್ರ 6.7

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ ಆಗುವಂತೆ BC ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

ಸಾಧನೀಯ : AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.
ಅಂದರೆ, $\angle BAD = \angle DAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

ರಚನೆ : ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ C ನ ಮೂಲಕವಾಗಿ AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $CE \parallel AD$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$

$$\therefore \quad AE = AC$$

$\triangle ACE$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle ACE = \angle AEC \quad (AE = AC)$ (3)

AC ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle DAC = \angle ACE$ (ಒಳ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮ) (4)

BE ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle BAD = \angle AEC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ) (5)

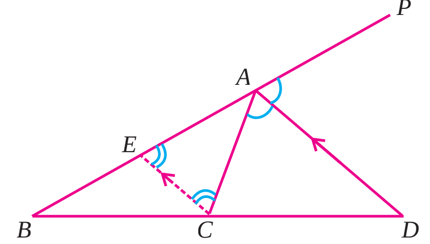
(3), (4) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ,

$\angle BAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ.

ಸಂಗತಿ ***(ii)*** (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) (ಈ ಭಾಗವು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ)



ಚಿತ್ರ 6.8

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ AD ರೇಖೆಯು ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ ಆಗುವಂತೆ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. (1)

ಸಾಧನೀಯ: AD ಯು $\angle PAC$ ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\angle PAD = \angle DAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

ರಚನೆ : C ನ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ BA ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $CE \parallel DA$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{EA}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \quad \therefore\ AE = AC$$

$\triangle ACE$ ರಲ್ಲಿ, $\angle ACE = \angle AEC$ $(AE = AC)$ (3)

AC ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle ACE = \angle DAC$ (ಒಳ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) (4)

BA ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle PAD = \angle AEC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) (5)

(3), (4) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ,

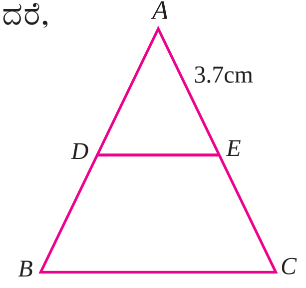
$\angle PAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD ಯು $\angle PAC$ ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.1

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಮತ್ತು $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$. $AE = 3.7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, EC ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.9

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$.

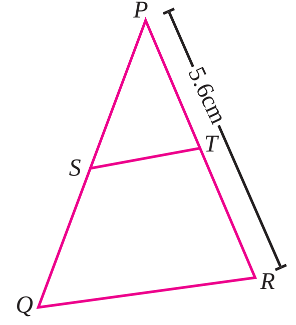
$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ)

$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.2

$\triangle PQR$ ರಲ್ಲಿ, $ST \parallel QR$ ಮತ್ತು $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ ಆಗಿರುವಂತೆ PQ ಮೇಲಿನ S ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $PR = 5.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PT ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.10

ಪರಿಹಾರ $\triangle PQR$ ರಲ್ಲಿ, $ST \parallel QR$

ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ (1)

$PT = x$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1) ರಿಂದ, $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

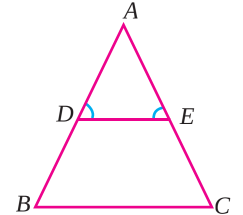
$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$

$5x = 16.8 - 3x$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{16.8}{8} = 2.1$ ಅಂದರೆ, PT = 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.3

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಮತ್ತು $\angle ADE = \angle DEA$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $\triangle ABC$ ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.11

ಪರಿಹಾರ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದಿಂದ, $DE \parallel BC$.

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC$ (1)

ಮತ್ತು $\angle DEA = \angle BCA$ (2)

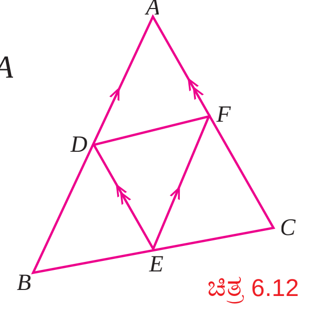
ಆದರೆ $\angle ADE = \angle DEA$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ, $\angle ABC = \angle BCA$

$\therefore \quad AC = AB$ (ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ABC$ ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.4



ಚಿತ್ರ 6.12

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, D, E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC ಮತ್ತು CA ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ $DE \parallel AC$ ಮತ್ತು $FE \parallel AB$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel AC$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ) (1)

$FE \parallel AB$ ಎಂದು ಕೂಡ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ) (2)

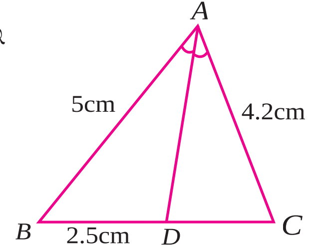
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC}$$

$\Longrightarrow \quad \frac{BD + AD}{AD} = \frac{AF + FC}{FC}$ (ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊ ನಿಯಮದಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.5



ಚಿತ್ರ 6.13

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕ AD ಯು BC ಬಾಹುವನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $BD = 2.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AC = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, DC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ)

$\Longrightarrow \quad DC = \frac{BD \times AC}{AB}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad DC = \frac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.6

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AE ಯು $\angle A$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $AB = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $BC = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, CE ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

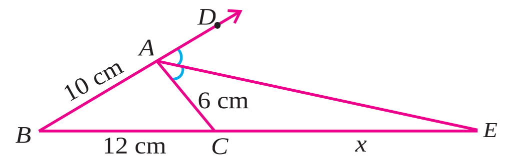
ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AE ಯು $\angle A$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

$CE = x$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ. ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{12 + x}{x} = \frac{10}{6}$$

$3(12 + x) = 5x$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 18$.

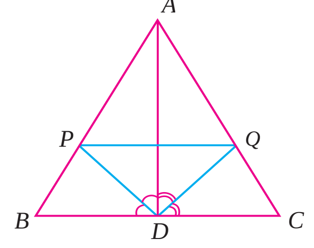
ಆದ್ದರಿಂದ, $CE = 18$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 6.14

ಉದಾಹರಣೆ 6.7

$\triangle ABC$ ಯ BC ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ಆಗಿದೆ. DP ಯು $\angle BDA$ ವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು DQ ಯು $\angle ADC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, $PQ \parallel BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.15

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABD$ ಯಲ್ಲಿ, DP ಯು $\angle BDA$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD}$ (ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ) (1)

$\triangle ADC$ ಯಲ್ಲಿ, DQ ಯು $\angle ADC$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{DC}$ (ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ) (2)

ಆದರೆ $BD = DC$ (D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು)

(2) $\Longrightarrow \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{BD}$ (3)

(1) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ,

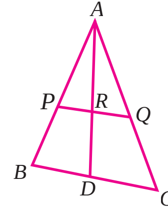
$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $PQ \parallel BC$. (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

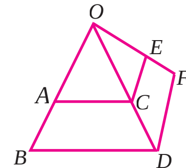
1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು.
   (i) $AD = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $DB = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AC ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $AD = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ, CE ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iii) $AD = 4x–3, BD = 3x–1, AE = 8x–7$ ಮತ್ತು $EC = 5x–3$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AP = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AR = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AC = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AD ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

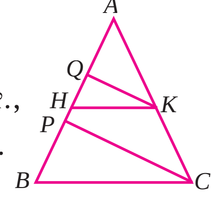


3. $\triangle PQR$ ನ PQ ಮತ್ತು PR ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿವೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ $EF \parallel QR$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
   (i) $PE = 3.9$ ಸೆಂ.ಮೀ., $EQ = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PF = 3.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $FR = 2.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.
   (ii) $PE = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QE = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PF = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $RF = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ.

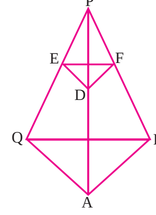
4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AC \parallel BD$ ಮತ್ತು $CE \parallel DF$. $OA = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ., $OC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $EF = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, FO ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



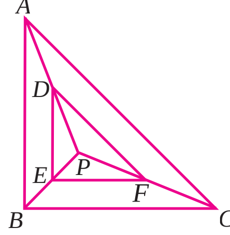
5. $ABCD$ ಯು ಒಂದು ಚತುಭುಜವಾಗಿದ್ದು AB ಯು CD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು AD ಯನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



6. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $PC \parallel QK$ ಮತ್ತು $BC \parallel HK$. $AQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QH = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $HP = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $KC = 18$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AK ಮತ್ತು PB ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



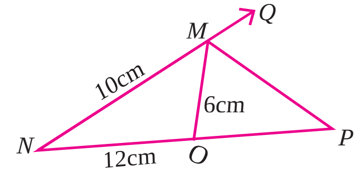
7. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $DE \parallel AQ$ ಮತ್ತು $DF \parallel AR$ ಆದರೆ, $EF \parallel QR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



8. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $DE \parallel AB$ ಮತ್ತು $DF \parallel AC$ ಆದರೆ, $EF \parallel BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು, BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.
   (i) $BD = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $DC = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $AB = 5.6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $DC = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, BC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iii) $AB = x$, $AC = x-2$, $BD = x+2$ ಮತ್ತು $DC = x-1$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ $\triangle ABC$ ಯ $\angle A$ ನ ಅರ್ಧಕವು AD ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
   (i) $AB = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BD = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 2.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.
   (ii) $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BD = 1.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ.



11. $\triangle MNO$ ರಲ್ಲಿ, MP ಯು $\angle M$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು, ವೃದ್ಧಿಸಿದ NO ವನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $MN = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ., $MO = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $NO = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, OP ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳ ಅರ್ಧಕಗಳು AC ಯ ಮೇಲೆ E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

13. ΔABC ಯ $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವು BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\angle A$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

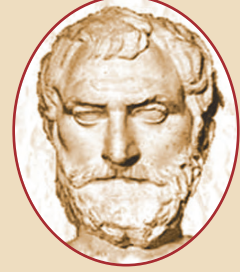
14. $ABCD$ ಯು $AB = AD$ ಆಗುವುದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. AE ಮತ್ತು AF ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle DAC$ ಗಳ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕಗಳಾದರೆ, $EF \parallel BD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6.3 ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (Similar triangles)

8 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕಾದ ಕಡ್ಡಾಯವಿಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಮರೂಪಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

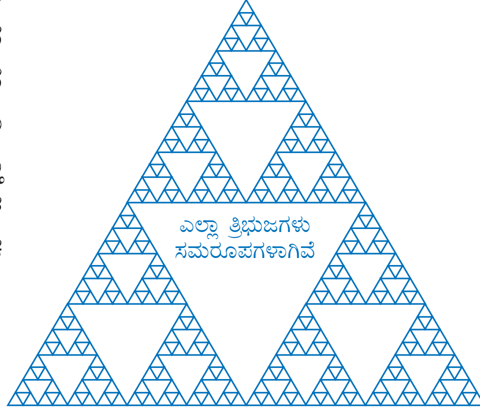
ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲೂ, ನಾವು ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಅಥವಾ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳುಳ್ಳ ಹಲವಾರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಮರದ ಎಲೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಆದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಅಥವಾ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದೇ ನೆಗೆಟಿವ್‌ನಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳ ಚಿತ್ರಪಟಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಆದರೆ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಆದರೆ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು **ಸಮರೂಪ ವಸ್ತುಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಥೇಲ್ಸ್ರವರನ್ನು ಗ್ರೀಕ್‌ನಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದವರು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ತತ್ವ ಮತ್ತು ನೆರಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಥೇಲ್ಸ್‌ರವರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ನಂಬಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಳಕೆಯು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸಿದೆ. ಇವರು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದದ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದರು. ಇವರು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ.



ಮಿಲೆಟಸ್‌ನ ಥೇಲ್ಸ್
(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 624-546) ಗ್ರೀಕ್

ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ, ವಿಜ್ಞಾನಿ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿರುವ ನಿಗಮನ ತರ್ಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಬಳಸಿದ ಕೀರ್ತಿಗೆ ಪಾತ್ರರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಇವರ ವಿಧಾನವು ಹಲವಾರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಗಮನವನ್ನು ಸೆಳೆದಿದೆ. ಇವರು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 585 ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಸೂರ್ಯಗ್ರಹಣವನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ತಿಳಿಸಿದ್ದರು.



ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೂ ಈ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳವಾದ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

- ಒಂದು ರಟ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ರಂಧ್ರವನ್ನು ಮಾಡಿ.
- ನೆಲದಿಂದ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಮೇಲೆ ಈ ರಟ್ಟನ್ನು ಸೂರ್ಯನ ಬೆಳಕಿಗೆ ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ನೆಲದ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಆಕಾರಗಳು ರಚನೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡಲು ರಟ್ಟನ್ನು ನೆಲದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ.
- ನೆಲಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕದಾಗುತ್ತದೆ. ನೆಲದಿಂದ ದೂರ ಹೋದಂತೆ, ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತದೆ.
- ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಾತ್ರಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡ, ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(i) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ (ಅಥವಾ)

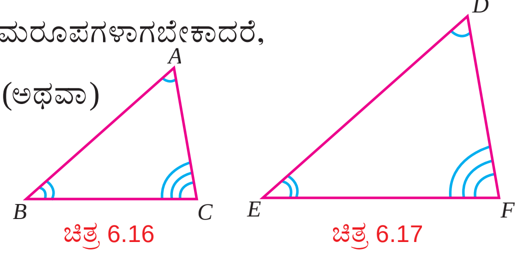
(ii) ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದ (ಸಮಾನುಪಾತದ) ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ,

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ABC ಮತ್ತು DEF ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ,

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ (ಅಥವಾ)

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ಆಗಿರಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 6.16 ಚಿತ್ರ 6.17

ಇಲ್ಲಿ, A, B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E ಮತ್ತು F ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ, ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ಎಂಬಂತೆ ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\triangle ABC$ ಯು $\triangle DEF$ ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. '$\sim$' ಸಂಕೇತವು 'ಸಮರೂಪ' ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle DEF$ ಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪವಾದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\triangle BCA \sim \triangle EFD$ ಮತ್ತು $\Delta CAB \sim \Delta FDE$ ಎಂಬಂತೆಯೂ ಕೂಡ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

6.3.1 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಮಾನದಂಡ (Criteria for similarity of triangles)

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಮಾನದಂಡಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ.

(i) ಕೋಕೋ (ಕೋನ–ಕೋನ) ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳು ಕೂಡ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡವನ್ನು ಕೋಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಕೂಡ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಬಾಬಾಬಾ (ಬಾಹು–ಬಾಹು–ಬಾಹು) ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡ

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ (ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ) ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

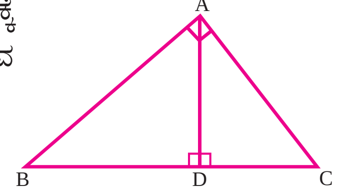
(iii) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಬಾಕೋಬಾ (ಬಾಹು–ಕೋನ–ಬಾಹು) ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ ಮತ್ತು ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧನೆರಹಿತವಾಗಿ ನಾವು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

(i) ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಶೃಂಗದಿಂದ ಅದರ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪೂರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



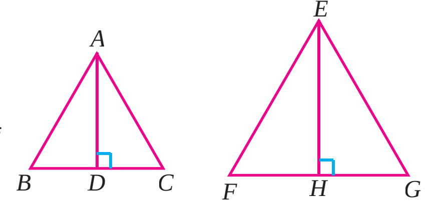
ಚಿತ್ರ 6.18

ಇಲ್ಲಿ, (a) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, ABC$

(b) $\Delta\, DAC \sim \Delta\, ABC$

(c) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, DAC$

(iii) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾದರೆ, ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.19 ಚಿತ್ರ 6.20

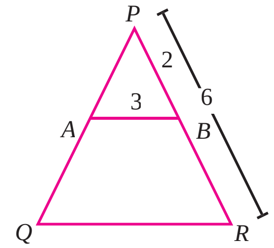
ಅಂದರೆ, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ ಆದರೆ, $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE} = \frac{AD}{EH}$

(iv) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾದರೆ, ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅನುರೂಪ ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ ಆದರೆ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.8

ΔPQR ರಲ್ಲಿ, $AB \parallel QR$. AB ಯು 3ಸೆಂ.ಮೀ., PB ಯು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR ಯು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, QR ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.21

ಪರಿಹಾರ AB ಯು 3ಸೆಂ.ಮೀ., PB ಯು 2 ಸೆಂ.ಮೀ., PR ಯು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel QR$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ΔPAB ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle PAB = \angle PQR$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle P$ ಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ.

$\therefore\ \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{PB}{PR}$$

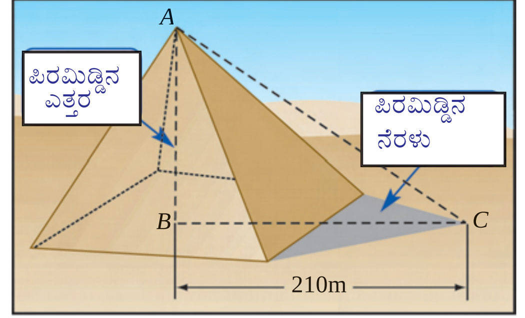
$$QR = \frac{AB \times PR}{PB}$$

$$= \frac{3 \times 6}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $QR = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.9

1.8 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಮನುಷ್ಯನ ನೆರಳು 2.7 ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ನೆರಳು 210 ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.22

ಪರಿಹಾರ AB ಮತ್ತು DE ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಿರಮಿಡ್ ಮತ್ತು ಮನುಷ್ಯನ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

BC ಮತ್ತು EF ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಿರಮಿಡ್ ಮತ್ತು ಮನುಷ್ಯನ ನೆರಳುಗಳ ಉದ್ದಗಳಾಗಿರಲಿ.

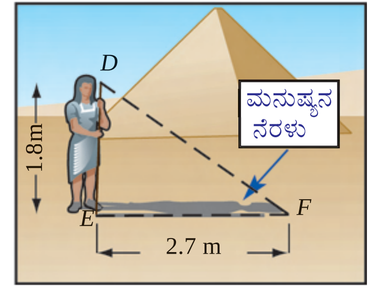
ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ,

$$\angle ABC = \angle DEF = 90^{o}$$

$$\angle BCA = \angle EFD$$

(ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)



ಚಿತ್ರ 6.23

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

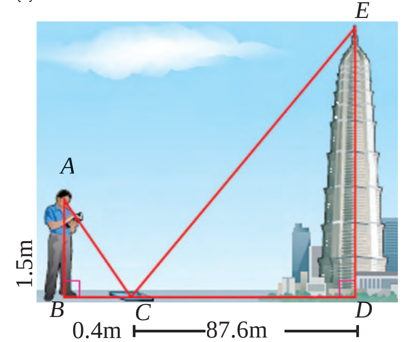
$$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಎತ್ತರವು 140 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.10

ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಗೋಪುರದಿಂದ 87.6 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಮನುಷ್ಯನು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ 0.4 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದು, ನೆಲದಿಂದ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವು 1.5 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? (ಮನುಷ್ಯನ ಪಾದ, ಕನ್ನಡಿ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಪಾದವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ).

ಪರಿಹಾರ AB ಮತ್ತು ED ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮನುಷ್ಯನ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ. C ಯು ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ಪತನ ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 6.24

ΔABC ಮತ್ತು ΔEDC ಗಳಲ್ಲಿ,

$$\angle ABC = \angle EDC = 90^{o}$$

$$\angle BCA = \angle DCE$$

(ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಪತನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲನ ಕೋನ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta EDC$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

$\therefore \quad \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತೀಯವಾಗಿವೆ)

$$ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{87.6}{0.4} \times 1.5 = 328.5$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 328.5 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.11

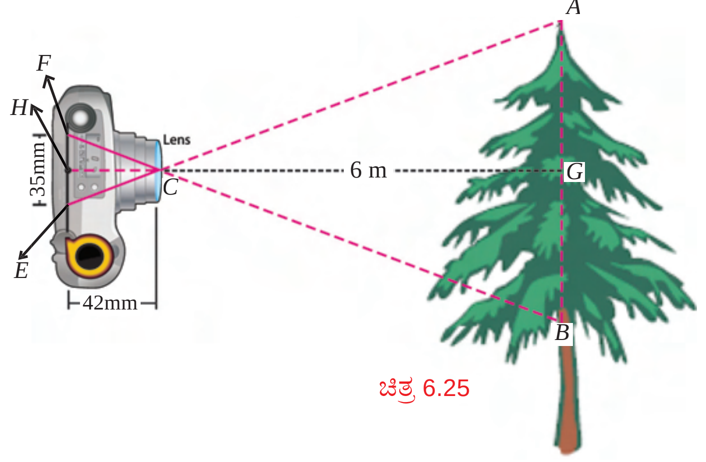
ಒಂದು ಮರದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಕ್ಯಾಮರಾದ ಫಿಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿ 35ಮಿ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ. ಮಸೂರದಿಂದ ಫಿಲ್ಮ್ ಗೆ ಇರುವ ದೂರವು 42 ಮಿ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಮಸೂರದಿಂದ ಮರಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವು 6 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಮರದ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಭಾಗವನ್ನು ಕ್ಯಾಮರಾವು ಸೆರೆಹಿಡಿದಿದೆ?

ಪರಿಹಾರ AB ಮತ್ತು EF ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮರದ ಭಾಗದ ಮತ್ತು ಫಿಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಇದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

C ಬಿಂದುವು ಮಸೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

CG ಮತ್ತು CH ಗಳು ΔACB ಮತ್ತು ΔFEC ಗಳ ಔನ್ನತ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

AB || FE ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.25

ΔACB ಮತ್ತು ΔFEC ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle BAC = \angle FEC$

$\angle ECF = \angle ACB$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

$\therefore\ \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CG}{CH}$

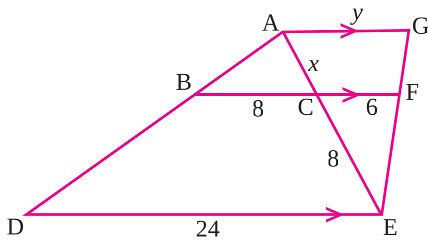
$\Longrightarrow \quad AB = \dfrac{CG}{CH} \times EF = \dfrac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕ್ಯಾಮರಾವು ಸೆರೆಹಿಡಿದಿರುವ ಮರದ ಎತ್ತರವು 5ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

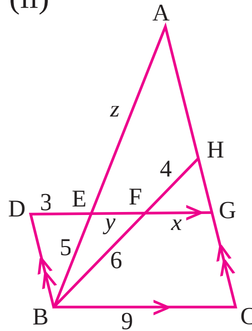
ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ)

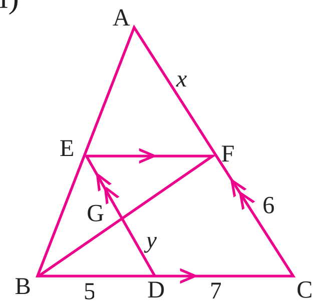
(i)



(ii)



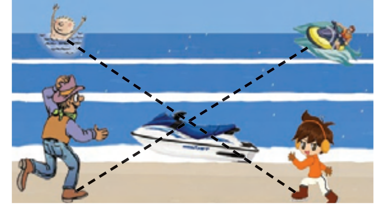
(iii)



2. 1.8ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಕ್ಯಾಮರಾದ ಫಿಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿ 1.5ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ. ಕ್ಯಾಮರಾದ ಮಸೂರದಿಂದ 3ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಫಿಲ್ಮ್ ಇದ್ದರೆ, ಕ್ಯಾಮರಾದಿಂದ ಮನುಷ್ಯನು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ?

3. 120 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಹುಡುಗಿಯು ದೀಪದ ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ ದೂರಕ್ಕೆ 0.6 ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್ ವೇಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ದೀಪವು ನೆಲ ಮಟ್ಟದಿಂದ 3.6 ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದರೆ, 4 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಅವಳ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿಯು ತನ್ನ ತಂದೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಮುದ್ರ ತೀರದಲ್ಲಿದ್ದಾಳೆ. ಅವಳು ಒಬ್ಬ ಈಜುಗಾರನು ಮುಳುಗುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಅವಳಿಂದ 50 ಮೀ. ಪಶ್ಚಿಮದಲ್ಲಿರುವ ತನ್ನ ತಂದೆಗೆ ಕಿರುಚಿ ತಿಳಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳ ತಂದೆಯು ದೋಣಿಗೆ ಅವಳಿಗಿಂತ 10 ಮೀ. ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಅವಳ ತಂದೆಯು ಈಜುಗಾರನನ್ನು ತಲುಪಲು ದೋಣಿಯನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ದೋಣಿಯಿಂದ 126 ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕು. ಇದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, ದೋಣಿಯಿಂದ 98 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಜಲ ನೌಕೆಯನ್ನು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಹುಡುಗಿಯು ಗುರುತಿಸಿದಳು. ಜಲ ನೌಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮನುಷ್ಯನು ಈಜುಗಾರನ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ. ಈಜುಗಾರನನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು ಮನುಷ್ಯನು ಎಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕು? (ಸುಳಿವು: ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ).



5. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ΔABC ಯ ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. $AP = 3$ಸೆಂ.ಮೀ., $PB = 6$ಸೆಂ.ಮೀ., $AQ = 5$ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $QC = 10$ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $BC = 3\,PQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

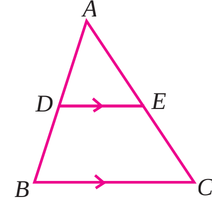
6. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $AB = AC$ ಹಾಗೂ $BC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ.. $AD = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವು AC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿದೆ. $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದ BD ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $AB = 3\,AD$ ಮತ್ತು ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 72 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $DBCE$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

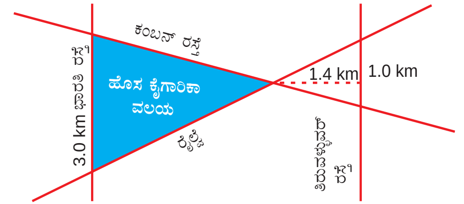
8. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು 6 ಸೆಂ.ಮೀ., 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ ಹಾಗೂ $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. $\triangle PQR$ ನ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. $\triangle PQR$ ಗೆ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆ ಏನು?

9. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಮತ್ತು $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{3}{5}$. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

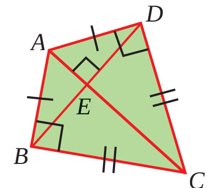
(i) $\dfrac{\Delta ADE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta ABC \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$ (ii) $\dfrac{BCED \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta ABC \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$



10. ಸರ್ಕಾರವು ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿರುವ ಬಳಕೆಯಾಗದ ಜಮೀನಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಕೈಗಾರಿಕಾ ವಲಯವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಯೋಜನೆ ಹಾಕುತ್ತಿದೆ. ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ಭಾಗವು ಹೊಸ ಕೈಗಾರಿಕಾ ವಲಯದ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹೊಸ ಕೈಗಾರಿಕಾ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



11. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $AE = 16$ ಸೆಂ.ಮೀ., $EC = 81$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ವಜ್ರಾಕಾರದ ಗಾಳಿಪಟದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು BD ಅಡ್ಡರೇಖೆಯನ್ನು ಬಳಸಲು ಬಯಸಿದ್ದಾನೆ. ಇದು ಎಷ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು?

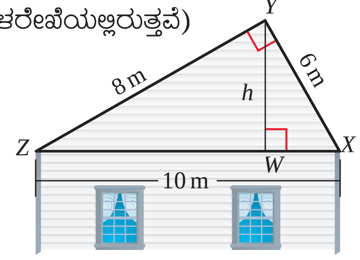


12. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಬಯಸಿ, ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ತಾನು ನೋಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಇಟ್ಟನು. ಅವನಿಂದ ಕನ್ನಡಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವು 0.5ಮೀ. ಮತ್ತು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ ಬಾವುಟ ಕಂಬಕ್ಕಿರುವ ದೂರವು 3ಮೀ.. ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳು ನೆಲ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.5ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಪಾದ, ಕನ್ನಡಿ ಮತ್ತು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಪಾದಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ)

13. ಒಂದು ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಸೀಳು ನೋಟವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತಿದೆ.

(i) ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(ii) ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಎತ್ತರ h ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



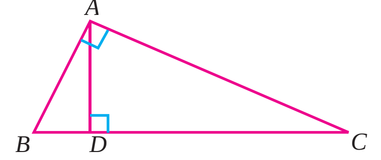
ಪ್ರಮೇಯ 6.5 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ (ಬಂಧಯಾನ್ ಪ್ರಮೇಯ)

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle A = 90^\circ$.

ಸಾಧನೀಯ : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

ರಚನೆ : $AD \perp BC$ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.26

ಸಾಧನೆ

ABC ಮತ್ತು DBA ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle B$ ಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೂ, $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA}$

$\therefore \quad AB^2 = DB \times BC \qquad (1)$

ಹೀಗೆಯೇ, $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\therefore \quad AC^2 = BC \times DC \qquad (2)$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$$
$$= BC(BD + DC)$$
$$= BC \times BC = BC^2$$

ಆಗ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. ಇದರಿಂದ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವು ಎರಡು ಮೂಲಭೂತ ನೋಟಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಒಂದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಉದ್ದಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಸೆಯುತ್ತದೆ. ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಮೊದಲು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರು ತಿಳಿಸಿ, ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ.

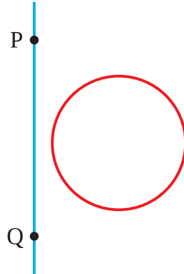
ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.)

ಪ್ರಮೇಯ 6.6 **ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ**

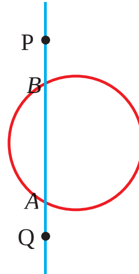
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, ಮೊದಲ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6.4 ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು (Circles and Tangents)

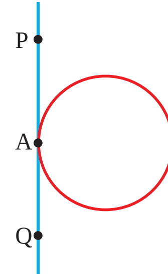
ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರಚನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಗಳು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತವಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ. ನಾವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ – ಅವು ಎಲ್ಲೂ ಛೇದಿಸದಂತಿರಬಹುದು, ಅವು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಅವು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.27



ಚಿತ್ರ 6.28



ಚಿತ್ರ 6.29

ಚಿತ್ರ 6.27 ರಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತ ಮತ್ತು PQ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 6.28 ರಲ್ಲಿ, PQ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, PQ ಎಂಬುದನ್ನು ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 6.29 ರಲ್ಲಿ, PQ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ತತ್ಸಮಾನವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. PQ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಆಧಾರಿತವಾಗಿರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು (ಸಾಧನೆಗಳ ರಹಿತವಾಗಿ)

1. ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
3. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.
4. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
5. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

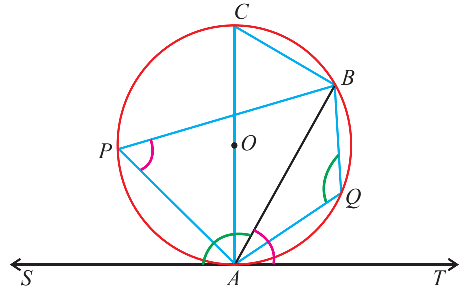
ಪ್ರಮೇಯ 6.7 ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ (Tangent-Chord theorem)

ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜ್ಯಾವು ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : O ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ . ST ಯು A ನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು AB ಯು ಜ್ಯಾ. AB ಜ್ಯಾದ ಅಭಿಮುಖ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$

ರಚನೆ: ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ AC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. B ಮತ್ತು C ಸೇರಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.30

ಸಾಧನೆ

ಹೇಳಿಕೆ	ಕಾರಣ	
$\angle ABC = 90^\circ$	ಅರ್ಧ–ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನವು 90°	
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯ ಎರಡು ಲಘುಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ	(1)
$\angle CAT = 90^\circ$	ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ವ್ಯಾಸ $\perp$ ಸ್ಪರ್ಶಕ	
$\implies \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$		(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ	
$\implies \angle BCA = \angle BAT$		(3)

$\angle BCA = \angle BPA$	ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು	(4)
$\angle BAT = \angle BPA$. ಇದರಿಂದ (i).	(3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ	(5)
ಈಗ $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$	ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು	
$\Longrightarrow \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$	(5) ರಿಂದ	(6)
Also $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$	ಸರಳಯುಗ್ಮ	(7)
$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$	(6) ಮತ್ತು (7) ರಿಂದ	
$\angle BAS = \angle AQB$. ಇದರಿಂದ (ii).		

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.8 ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ

ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವಂತೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ



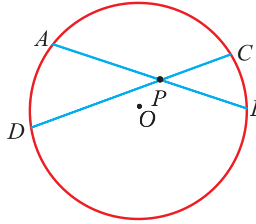
P ಯು AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$PA \times PB$ ಗುಣಲಬ್ಧವು PA ಮತ್ತು PB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

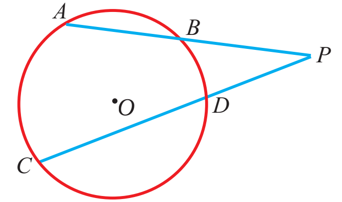
ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು AB ರೇಖಾಖಂಡದ PA ಮತ್ತು PB ಭಾಗಗಳಿಂದಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.9

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.31



ಚಿತ್ರ 6.32

ಚಿತ್ರ 6.31 ರಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆಗ $PA \times PB = PC \times PD$. ಚಿತ್ರ 6.32 ರಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆಗ $PA \times PB = PC \times PD$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.12

PQ ಎಂಬುದು A ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು AB ಯು ಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ. $\angle BAC = 54^\circ$ ಆಗುವಂತೆ C ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು $\angle BAQ = 62^\circ$ ಆಗಿರಲಿ. $\angle ABC$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ PQ ಎಂಬುದು A ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು AB ಯು ಜ್ಯಾ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

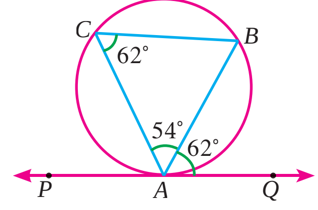
$\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ$. (ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ)

ಹಾಗೂ, $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$.

(ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180°)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$

$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ$.

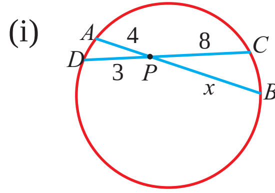


ಚಿತ್ರ 6.33

ಉದಾಹರಣೆ 6.13

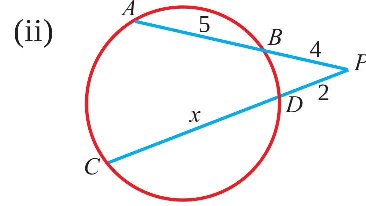
ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)



ಚಿತ್ರ 6.34

(ii)



ಚಿತ್ರ 6.35

ಪರಿಹಾರ (i)

$PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

$PB = \frac{PC.PD}{PA}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{8 \times 3}{4} = 6$.

(ii)

$PC \,.\, PD = PA.\, PB$

$(2+x)\, 2 = 9 \times 4$

$x + 2 = 18$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 16$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.14

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PA ಮತ್ತು PB ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. CD ಯು E ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು $AP = 15$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ΔPCD ಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE$ ಮತ್ತು $PA = PB$.

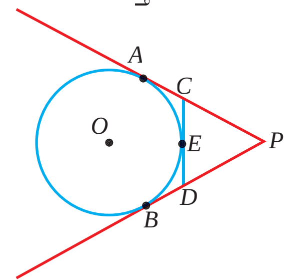
$\therefore \Delta\, PCD$ ಯ ಸುತ್ತಳತೆ $= PC + CD + DP$

$= PC + CE + ED + DP$

$= PC + CA + DB + DP$

$= PA + PB = 2\,PA \qquad (PB = PA)$

$= 2 \times 15 = 30$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 6.36

ಉದಾಹರಣೆ 6.15

$ABCD$ ಯು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AD ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವೃತ್ತವು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿರಲಿ. ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore$ $AP = AS$ (1), $BP = BQ$ (2), $CR = CQ$ (3), $DR = DS$ (4).

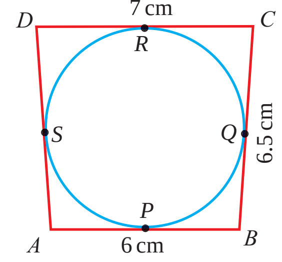
(1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$AB + CD = AD + BC.$

$AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AD = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 6.37

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, TP ಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. $\angle BTP = 72^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ATB = 43^\circ$ ಆದರೆ, $\angle ABT$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. AB ಮತ್ತು CD ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು. (i) $CP = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AP = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PB = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $AP = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 15$ ಸೆಂ.ಮೀ., $CP = PD$ ಆದರೆ, CD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿದ್ದು ಪರಸ್ಪರ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
   (i) $AB = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BP = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $PD = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, CD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $BP = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $CP = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AB ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ವೃತ್ತವು ΔABC ಯ BC ಬಾಹುವನ್ನು P ನಲ್ಲಿ, ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ, ವೃದ್ಧಿಸಿದ AC ಯನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. $AQ = AR = \frac{1}{2}$ (ΔABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
6. ಒಂದು ತಾವರೆ ಹೂವು ಕೊಳದಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮೇಲೆ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕಾಂಡವು ಭಾಗಶಃ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಕೆಳಗೆ ಇದೆ. ಗಾಳಿ ಬೀಸಿದ ಕಾರಣ ತಾವರೆಯ ಕಾಂಡವು ಪಕ್ಕಕ್ಕೆ ತಳ್ಳಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ತಾವರೆ ಹೂವು ಕಾಂಡದ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಳದಿಂದ 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ತಾವರೆಯ ಕಾಂಡದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವು ನೀರಿನ ಕೆಳಗಿತ್ತು?
7. $ABCD$ ಆಯತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ O ಬಿಂದುವನ್ನು A, B, C ಮತ್ತು D ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೃಂಗಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

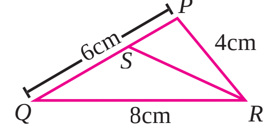
1. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು $\triangle ABC$ ಯ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{AE}{AC} =$

   (A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

2. $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, DE ಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ AB ಮತ್ತು AC ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $AD = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $DB = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = 2.7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $AC =$

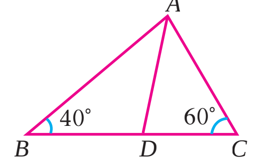
(A) 6.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

3. $\triangle PQR$ ರಲ್ಲಿ, RS ಎಂಬುದು $\angle R$ ನ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. $PQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $RP = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PS ಗೆ ಸಮನಾದುದು



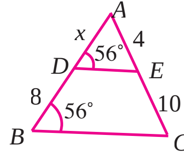
(A) 2 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 3 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, $\angle B = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle C = 60^\circ$ ಆದರೆ, $\angle BAD =$



(A) 30° (B) 50° (C) 80° (D) 40°

5. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, x ನ ಬೆಲೆಯು



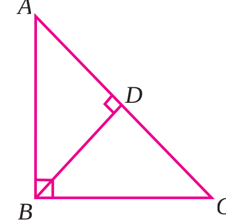
(A) $4 \cdot 2$ (B) $3 \cdot 2$

(C) $0 \cdot 8$ (D) $0 \cdot 4$

6. ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ಆದರೆ,

(A) $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{EF}$ (B) $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{FD}$ (C) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (D) $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{EF}$

7. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದ, ತಪ್ಪಾದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. 12 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಲಂಬವಾದ ಕಡ್ಡಿಯು ನೆಲದ ಮೇಲೆ 8 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೋಪುರವು 40 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು

(A) 40 ಮೀ. (B) 50 ಮೀ. (C) 75 ಮೀ. (D) 60 ಮೀ.

9. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳು 2:3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 9:4 (B) 4:9 (C) 2:3 (D) 3:2

10. ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 100 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 49 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. BC ಯು 8.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $EF =$

(A) 5.47 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 5.74 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 6.47 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6.74 ಸೆಂ.ಮೀ.

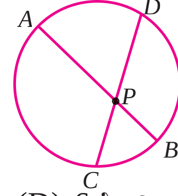
11. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಮೊದಲ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವು

(A) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 3 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 9 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

12. AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿದ್ದು, $AB = 5$, $AP = 8$ ಮತ್ತು $CD = 2$ ಆಗುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ $PD =$

(A) 12 (B) 5 (C) 6 (D) 4

13. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳು P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $AB = 16$ಸೆಂ.ಮೀ., $PD = 8$ಸೆಂ.ಮೀ., $PC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AP >PB ಆದರೆ, AP =

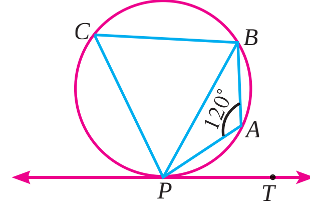


(A) 8ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 4ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 12ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6ಸೆಂ.ಮೀ.

14. ವೃತ್ತದ O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ P ಬಿಂದುವು 26ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ PT ಸ್ಪರ್ಶಕವು 10ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. OT ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) 36ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 20ಸೆಂ.ಮೀ.

(C) 18ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 24ಸೆಂ.ಮೀ.



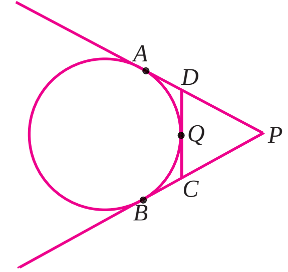
15. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle PAB = 120^\circ$ ಆದರೆ, $\angle BPT =$

(A) 120^o (B) 30^o (C) 40^o (D) 60^o

16. O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ PA ಮತ್ತು PB ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ 40^o ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, $\angle POA =$

(A) 70^o (B) 80^o

(C) 50^o (D) 60^o



17. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, PA ಮತ್ತು PB ಗಳು P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. CD ಯು Q ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. $PA = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CQ = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PC ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) 11 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 24 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 38 ಸೆಂ.ಮೀ.

18. ΔABC ಯು $\angle B = 90^\circ$ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $BD \perp AC$. BD = 8 ಸೆಂ.ಮೀ., $AD = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, CD ಯು

(A) 24 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 16 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 32 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 8 ಸೆಂ.ಮೀ.

19. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 16 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 36 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಮೊದಲ ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯವು 3ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪವಾದ ಔನ್ನತ್ಯವು

(A) 6.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

20. ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 36ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 24ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. $DE = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AB ಯು

(A) 12 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 15 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 18 ಸೆಂ.ಮೀ.

7

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

- ಪೀಠಿಕೆ
- ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು
- ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು



ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 190 - 120) ಗ್ರೀಕ್

ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್‌ರವರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು. ಇವರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಗೋಳೀಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದರು. ಇವರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಸೂರ್ಯಗ್ರಹಣ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರಗ್ರಹಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೂರ್ಯ ಗ್ರಹಣಗಳನ್ನು ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯಲು ನಂಬಲರ್ಹ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಇವರು ಪ್ರಥಮರಾಗಿರಬಹುದು. ಬರಿಗಣ್ಣಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಗೆ ದೀರ್ಘ ಕಾಲದವರೆಗೆ ಬಳಕೆ ಮಾಡಿದ ಹಲವಾರು ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಉಪಕರಣಗಳ ಸಂಶೋಧನೆ ಅಥವಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ ಕೀರ್ತಿಯು ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್‌ರವರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕಂಸಗಳ ಗಾತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವ ಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲಾಯಿತು. 15 ನೇ ಶತಮಾನದ ನಂತರ, ಇದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಲು ಬಳಸಲಾಯಿತು. ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದ ಗ್ರೀಕ್ ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್‌ರವರನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಸೃಷ್ಟಿಕರ್ತ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಅಳತೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವ **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ** ಎಂಬ ಪದವು ಬಾರ್ತಲೋಮಸ್ ಪಿಟಿಸ್ಕಸ್ (1561-1613) ರ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿದೆ.

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳು, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿಖರವಾಗಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ ಕಟ್ಟಡಗಳ, ಬೆಟ್ಟಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಅನ್ವಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

7.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Trigonometric identities)

ಸಮೀಕರಣವು ಅರ್ಥವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುವಂತೆ ಚರಾಕ್ಷರದ(ಗಳ) ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯವಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು a ಮತ್ತು b ನ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು, ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನದ(ಗಳ) ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾದರೆ, ಇದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$ ಸಮೀಕರಣವು θದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

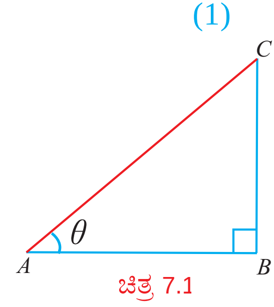
ಆದಾಗ್ಯೂ, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$ ಸಮೀಕರಣವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇದು $\theta = 0^\circ$ ಆದಾಗ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, $\theta = 45^\circ$ ಆದಾಗ $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸತ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ.

> ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅರ್ಥಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಮೂರು ಉಪಯುಕ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$



ಚಿತ್ರ 7.1

(1) ರ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು AC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\angle A = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಎಲ್ಲಾ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ಗಳಿಗೆ,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \qquad (2)$$

ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರವಾಗಿ, $\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$ ಮತ್ತು $\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ = 1$.

ಇದರಿಂದ, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ಆಗುವಂತಹ θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ (2) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(1) ನ್ನು AB^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because AB \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\tan\theta$ ಮತ್ತು $\sec\theta$ ಗಳು $\theta = 90^\circ$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ಆಗುವಂತಹ θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ (3) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ (1) ರ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು BC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because BC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\cot\theta$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}\theta$ ಗಳು $\theta = 0^\circ$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ಆಗಿರುವಂತಹ θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ (4) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(2) ರಿಂದ (4) ರವರೆಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಸಮಾನ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

	ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ	ಸಮಾನ ರೂಪಗಳು
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (ಅಥವಾ) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (ಅಥವಾ) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$	$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (ಅಥವಾ) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

ಗಮನಿಸಿ

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಲಘುಕೋನ θ ಗೆ ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಅರ್ಥಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ θ ಕೋನಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಲಘುಕೋನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನಮ್ಮನ್ನು ನಾವು ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನಗಳಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವ ಕೆಲವು ತಂತ್ರಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಬಹುದು.

(i) ಏನನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ.

(ii) ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಧಿಗ್ಧ ಭಾಗವನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ, ಸರಳವಾಗಿರುವುದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಸಂಧಿಗ್ಧವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಂಧಿಗ್ಧ ಭಾಗವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು ಸಂಧಿಗ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಬಹುದು.

(iv) ಸಂಕಲನದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿ.

(v) ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಅವುಗಳ ಸೈನ್(sine) ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್(cosine) ಸಮಾನಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

(vi) $\tan^2\theta, \cot^2\theta, \text{cosec}^2\theta, \sec^2\theta$ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ಮತ್ತು $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.1

$\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)} + \dfrac{\cos\theta}{\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)}$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

ಉದಾಹರಣೆ 7.2

$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad (1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\ .$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.3

$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad \because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta,\ \because \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.4

$\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad \because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad \because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.5

$\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$$= \frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1} + \frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)} = \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1} + \frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1} - \frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$= \frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta - \frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\tan\theta-1)} \quad \frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta} \qquad (\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$= \frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta} + \frac{\tan\theta}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \tan\theta + 1 + \cot\theta$$

$$= 1 + \tan\theta + \cot\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.6

$(\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2 = 7 + \tan^2\theta + \cot^2\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮೊದಲು ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$(\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2$

$$= \sin^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta + \cos^2\theta + \sec^2\theta + 2\cos\theta\sec\theta$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta + 2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta} + 2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 1 + (1+\cot^2\theta) + (1+\tan^2\theta) + 2 + 2$$

$$= 7 + \tan^2\theta + \cot^2\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.7

$(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$. ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\sin^6\theta + \cos^6\theta$

$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$(a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.8

$\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$. ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \dfrac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.9

$\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$. ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮೊದಲು ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right) \times \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$

$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.10

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮೊದಲು ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{1+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.11

$$(\text{cosec}\,\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $(\text{cosec}\,\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

ನಂತರ, $\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

$$= \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

ಸೂಚನೆ

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$(\text{cosec}\,\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.12

$\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ ಮತ್ತು $m \neq n$ ಆದರೆ, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

$m = \tan\theta + \sin\theta$ ಮತ್ತು $n = \tan\theta - \sin\theta$. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $$m^2 - n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$$

$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)$$

ಹಾಗೂ, $$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$$

$$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$

$$= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)} = 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$

$$= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

ಉದಾಹರಣೆ 7.13

$\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ಆದರೆ, $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

> ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ ಮತ್ತು ಡಿವಿಡೆಂಡೋ ನಿಯಮ
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಆದರೆ, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ ಮತ್ತು ಡಿವಿಡೆಂಡೋ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

ಸೂಚನೆ: ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ ಮತ್ತು ಡಿವಿಡೆಂಡೋ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸದೆಯೂ ಕೂಡ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

   (i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2 + \sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2. ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (i) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

   (iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

   (v) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

   (vii) $\sec\theta(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = 1 - \cos\theta$

3. ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (i) $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ-\theta)} = 2\sec\theta$

   (ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

   (iii) $\dfrac{\sin(90^0-\theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

   (iv) $\dfrac{\tan(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}\theta+1} + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta+1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

   (v) $\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$

   (vi) $(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta) = 2$

   (vii) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

   (viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0-\theta)}{2\sin^2(90^0-\theta)-1}$

   (ix) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}.$

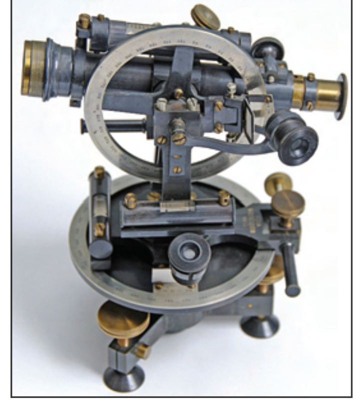
   (x) $\dfrac{\cot^2\theta+\sec^2\theta}{\tan^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta).$

4. $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ ಮತ್ತು $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ ಆದರೆ, $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $\tan\theta = n\tan\alpha$ ಮತ್ತು $\sin\theta = m\sin\alpha$ ಆದರೆ, $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $\sin\theta$, $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7.3 ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು (Heights and Distances)



ಚಿತ್ರ 7.2

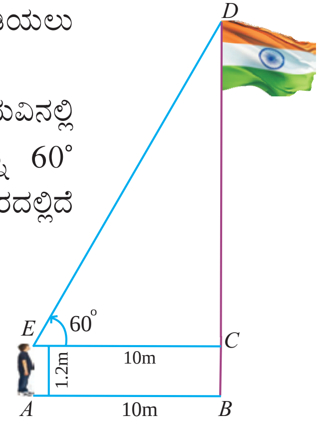
ಗ್ರಹಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ, ಹಿಮಾಲಯ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರ, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಸೂರ್ಯನಂತೆ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಳತೆಯ ಟೇಪುಗಳಿಂದ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆ ರೀತಿಯ ಅಂತರಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾಗಿದೆ. ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ದ್ವೀಪದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಕೂಡಾ ಈ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಮೋಜಣಿದರ್ಶಕವು (ಥಿಯೋಡೊಲೈಟ್) (ಚಿತ್ರ 7.2) ಒಂದು ವಸ್ತು ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕರ ಕಣ್ಣಿನ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸುವ ಉಪಕರಣವಾಗಿದೆ. ಮೋಜಣಿದರ್ಶಕವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರುವ ಎರಡು ಅಳತೆ ಮಾಪನವಿರುವ ಚಕ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ದೂರದರ್ಶಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಚಕ್ರಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ದೂರದರ್ಶಕವನ್ನು ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಿ ಅಳೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೋನವನ್ನು ದೂರದರ್ಶಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಓದಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೈಜವಾಗಿ ಅಳೆಯದೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಯಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಪಾದ B ನಿಂದ 10 ಮೀ. ದೂರದ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇವನು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ತುದಿಯನ್ನು 60° ಕೋನದಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟ E ಯು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.2 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 7.3 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 7.3

ಲಂಬಕೋನ ΔDEC ಯಲ್ಲಿ, $\angle DEC = 60^\circ$.

ಈಗ, $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 60^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, $CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$

$= 17.32$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ, $BD = BC + CD$

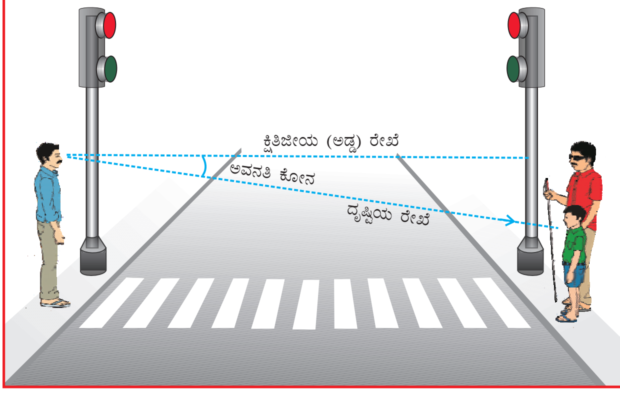
$= 1.2 + 17.32 = 18.52$ ಮೀ.

ಹೀಗೆ, ನೈಜವಾಗಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ, ನಾವು ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಬೇರೆ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೆಚ್ಚು ಬಳಸುವ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆ (Line of sight)

ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನಾವು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ, ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

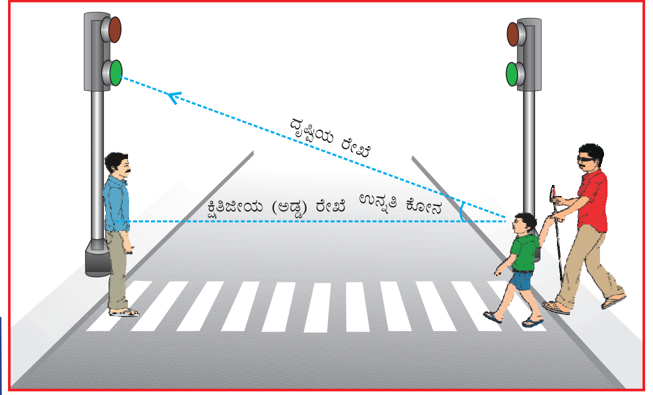
ಅವನತಿ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ ಕೋನ (Angle of depression and angle of elevation)



ಚಿತ್ರ 7.4

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕಣ್ಣುಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆಗಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಾವು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬಾಗಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳು ಒಂದು ಕೋನದ ಮೂಲಕ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಕೋನವನ್ನು ಅವನತಿ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ವಸ್ತುವು ಅಡ್ಡರೇಖೆಗಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಇದ್ದಾಗ, ಅಡ್ಡರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆಯು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಅವನತಿ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 7.4 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕಣ್ಣುಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆಗಿಂತ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಾವು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳು ಚಲಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಕೋನವನ್ನು ಉನ್ನತಿ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 7.5 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 7.5

ಸೂಚನೆ

(i) ವೀಕ್ಷಕರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರದಿದ್ದರೆ, ವೀಕ್ಷಕರನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ವೀಕ್ಷಕರಿಂದ ನೋಡಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು ವಸ್ತುವಿನಿಂದ ನೋಡಲ್ಪಟ್ಟ ವೀಕ್ಷಕರ ಅವನತಿ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೌಶಲಗಳು ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.

(i) ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಗಮನವಿಟ್ಟು ಓದಿರಿ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

(iii) ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ 'h' ಮತ್ತು ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ 'x' (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಎಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರಿ.

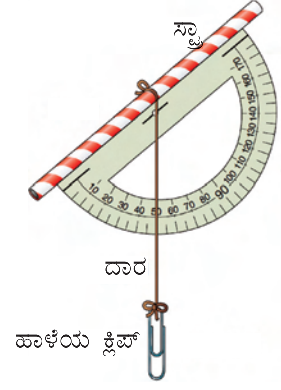
(iv) ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿರಿ.

(v) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿರಿ.

ಅಳೆಯಲು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ

- ದಾರದ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಹಾಳೆಯ ಕ್ಲಿಪ್ಪಿಗೆ ಕಟ್ಟಿರಿ.
- ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಮಧ್ಯ ಭಾಗವು ಕೋನಮಾಪಕದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಣೆಯಾಗುವಂತೆ ಕೋನಮಾಪಕದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ. ದಾರವು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೂಗುವಂತೆ ಎಚ್ಚರವಹಿಸಿರಿ.
- ನೇರವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ತುಂಬಾ ಎತ್ತರವಾಗಿರುವ ಬಾವುಟ ಕಂಬ, ಬ್ಯಾಸ್ಕೆಟ್ ಬಾಲ್ ಬಳೆ ಅಥವಾ ಶಾಲಾ ಕಟ್ಟಡಗಳಂತಹ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿ.
- ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಮುಲಕ ವಸ್ತುವಿನ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ದಾರ ಮತ್ತು ಕೋನಮಾಪಕವು ಛೇದಿಸುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಅಳತೆಯನ್ನು 90° ಯಿಂದ ಕಳೆದು ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ಇದು θ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.6

- ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ ನೆಲಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಪಾದದಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು y ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.
- ನಿಮ್ಮ ಅಳತೆಗಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು (h) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

  $h = x + y\tan\theta$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ ನೆಲಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.14

ಒಂದು ಗಾಳಿಪಟವು 200 ಮೀ. ಉದ್ದದ ದಾರದಿಂದ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುವಮಾಡಿದರೆ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಗಾಳಿಪಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ, ದಾರವು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ h ಎಂಬುದು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಗಾಳಿಪಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

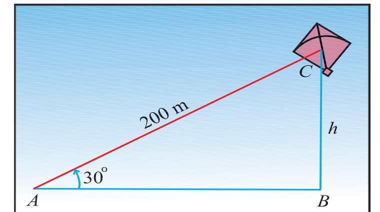
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AC ಎಂಬುದು ದಾರವಾಗಿದೆ.

$\angle CAB = 30^\circ$ ಮತ್ತು $AC = 200$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\sin 30^\circ = \frac{h}{200}$

$$\Longrightarrow \quad h = 200\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad h = 200\times\frac{1}{2} = 100 \text{ ಮೀ.}$$



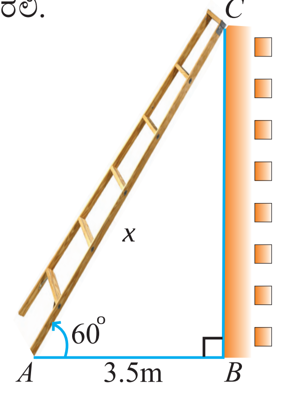
ಚಿತ್ರ 7.7

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಗಾಳಿಪಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವು 100 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.15

ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗೋಡೆಗೆ ಓರೆಯಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಏಣಿಯು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುವಮಾಡುತ್ತದೆ. ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 3.5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಏಣಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ AC ಯು ಏಣಿಯನ್ನು ಮತ್ತು B ಯು ಗೋಡೆಯ ಪಾದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.8

AC ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು x ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

$\angle CAB = 60^\circ$ ಮತ್ತು $AB = 3.5$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle\ CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 60^\circ}$

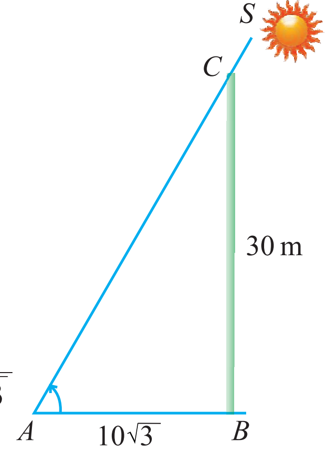
$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು 7 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.16

30 ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು $10\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿರುವಾಗ ಸೂರ್ಯನ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು (ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ S ಎಂಬುದು ಸೂರ್ಯನ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು BC ಯು ಕಂಬ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.9

AB ಯು ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

ಸೂರ್ಯನ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು θ ಆಗಿರಲಿ.

$AB = 10\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$BC = 30$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle\ CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \theta = 60^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಸೂರ್ಯನ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು 60° ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.17

ಒಬ್ಬ ವೀಕ್ಷಕನು ನೋಡಿದ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ. ವೀಕ್ಷಕನು ಗೋಪುರದಿಂದ $30\sqrt{3}$ ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ. ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟವು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.5 ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ BD ಯು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು AE ಯು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಆಗಿರಲಿ.

$AB = EC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ EC ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$AB = EC = 30\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$AE = BC = 1.5$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DEC$ ಯಲ್ಲಿ,

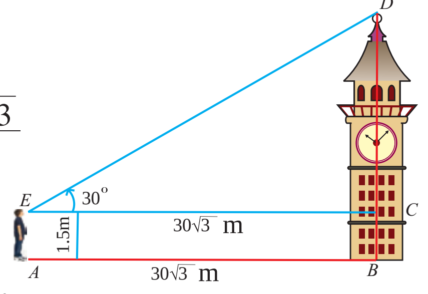
$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $BD = BC + CD$

$= 1.5 + 30 = 31.5$ ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 7.10

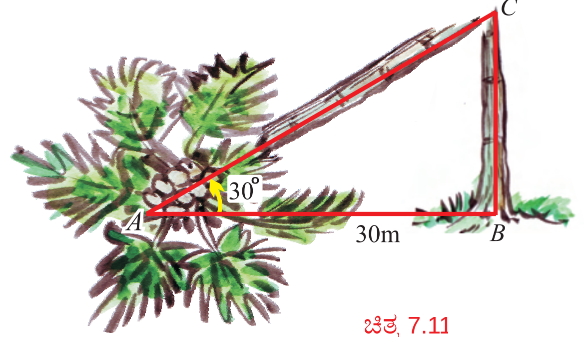
ಉದಾಹರಣೆ 7.18

ಒಂದು ಲಂಬವಾದ ಮರವು ಗಾಳಿಯಿಂದ ಮುರಿದಿದೆ. ಮರದ ತುದಿಯು ನೆಲವನ್ನು ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಮರದ ತುದಿಯು ಅದರ ಪಾದದಿಂದ 30 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲವನ್ನು ಮುಟ್ಟಿದರೆ, ಮರದ ನಿಜವಾದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮರವು ಮುರಿದಿರುವ ಬಿಂದು C ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ನೆಲವನ್ನು A ನಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವಂತಿರಲಿ. B ಯು ಮರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

$AB = 30$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$\angle CAB = 30^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.11

ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ ಮೀ.} \qquad (1)$$

ಈಗ, $$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$AC = \frac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3} \text{ ಮೀ.} \qquad (2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮರದ ಎತ್ತರ $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$= 30\sqrt{3}$ ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.19

ಒಂದೇ ವೀಕ್ಷಣಾ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿರುವಾಗ ಒಂದು ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನವು ನೆಲದಿಂದ 3000ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನದ ಮೇಲೆ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿದೆ. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)

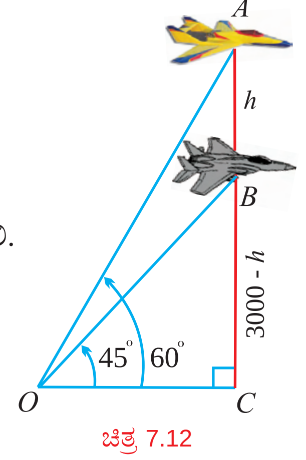
ಪರಿಹಾರ O ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ.

ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ಇರುವ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳು A ಮತ್ತು B ಆಗಿರಲಿ.

$AC = 3000$ ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವು C ಆಗಿರಲಿ.

$\angle AOC = 60^\circ$ ಮತ್ತು $\angle BOC = 45^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ, h ಎಂಬುದು ವಿಮಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.12

ಲಂಬಕೋನ $\triangle BOC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{OC}$

$\Longrightarrow OC = BC \qquad (\because \tan 45^\circ = 1)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $OC = 3000 - h \qquad (1)$

ಲಂಬಕೋನ $\triangle AOC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \dfrac{AC}{OC}$

$$\Longrightarrow OC = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $3000 - h = 1000\sqrt{3}$

$\Longrightarrow h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268$ ಮೀ.

ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ವಿಮಾನದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವು 1268 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

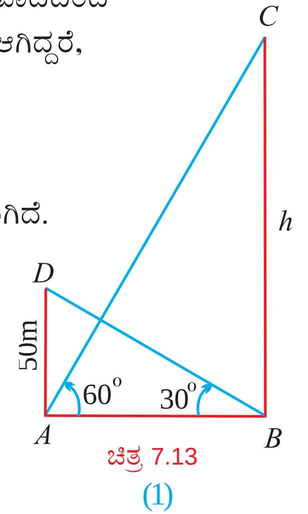
ಉದಾಹರಣೆ 7.20

ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಬೆಟ್ಟದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಮತ್ತು ಬೆಟ್ಟದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 50 ಮೀ. ಆಗಿದ್ದರೆ, ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ AD ಯು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು BC ಯು ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ ಮತ್ತು $AD = 50$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

BC = h ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.13

ಲಂಬಕೋನ ΔDAB ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30^\circ = \dfrac{AD}{AB}$

$\Longrightarrow AB = \dfrac{AD}{\tan 30^\circ}$

$\therefore AB = 50\sqrt{3}$ ಮೀ. (1)

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \dfrac{BC}{AB}$

$\Longrightarrow BC = AB \tan 60^\circ$

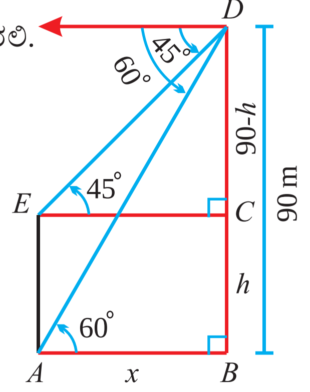
ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ, $h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವು 150 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.21

ಒಂದು ಲಂಬವಾದ ಗೋಡೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲಿವೆ. ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ, ಗೋಡೆಯ ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 90 ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ AE ಯು ಗೋಡೆಯನ್ನು ಮತ್ತು BD ಯು ಗೋಪುರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.14

$AB = EC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ EC ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $AE = BC$.

$AB = x$ ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = h$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ. $BD = 90$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$\angle DAB = 60^\circ, \angle DEC = 45^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $AE = BC = h$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $CD = BD - BC = 90 - h$.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{90}{x}$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$$

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DEC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 45^\circ = \frac{DC}{EC} = \frac{90-h}{x}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 90 - h \qquad (2)$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $90 - h = 30\sqrt{3}$

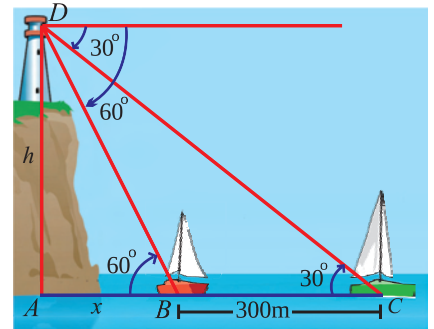
ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರ, $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.22

ಸಮುದ್ರ ತೀರದಲ್ಲಿರುವ ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟಿರುವ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ದೀಪದ ಮನೆಯ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ದೋಣಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಳು. ಎರಡು ದೋಣಿಗಳ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ದೋಣಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 300ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಮತ್ತು D ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಪಾದ ಮತ್ತು ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. B ಮತ್ತು C ಗಳು ಎರಡು ದೋಣಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಅಂತರವು h ಮೀಟರುಗಳು ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.15

$AB = x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

$\angle ABD = 60^\circ, \angle ACD = 30^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (1)$

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle ACD$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \Longrightarrow x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 300 = h\sqrt{3}$ (2)

(2) ರಲ್ಲಿ (1) ನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore$ $2h = 300\sqrt{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 150\sqrt{3}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಎತ್ತರವು $150\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.23

ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 88.2 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗಾಳಿಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಬಲೂನು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದನು. ನೆಲದಿಂದ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರ 1.2 ಮೀ. ಇದೆ. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ಬಲೂನಿನ ಅವನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಅದೇ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಬಲೂನಿನ ಅವನತಿ ಕೋನವು 30° ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸಿದೆ. ಆ ಕಾಲಾಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

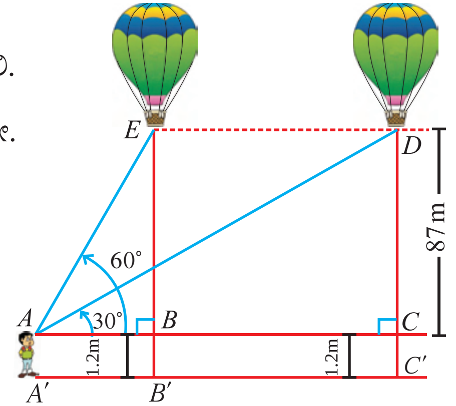
ಪರಿಹಾರ A ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

E ಮತ್ತು D ಗಳು ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿರುವಾಗ ಬಲೂನಿನ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಲಿ.

$BE = CD$ ಆಗುವಂತೆ B ಮತ್ತು C ಗಳು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

$A'A = B'B = C'C = 1.2$ ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ

A', B' ಮತ್ತು C' ಗಳು ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.16

$\angle EAB = 60^\circ, \angle DAC = 30^\circ$, $BB' = CC' = 1.2$ ಮೀ.

ಮತ್ತು $C'D = 88.2$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೂ $BE = CD = 87$ ಮೀ.

ಈಗ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle EAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಲೂನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವು

$$ED = BC = AC - AB$$

$$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.24

ಒಂದು ಬಾವುಟ ಕಂಬವನ್ನು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿವೆ. ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 10 ಮೀ. ಆದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ನ್ನು ಬಳಸಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ

ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಪಾದವು B ಆಗಿರಲಿ.

BC ಯು ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು CD ಯು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

$\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$ ಮತ್ತು $CD = 10$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$BC = h$ ಮೀ. ಮತ್ತು $AB = x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ,

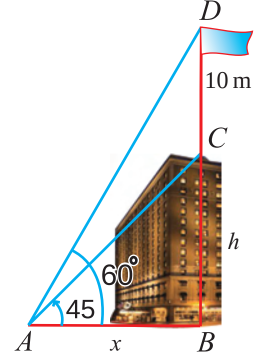
$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AB = BC.$ ಅಂದರೆ, $x = h$ (1)

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \quad \Longrightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$



ಚಿತ್ರ 7.17

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $h = \dfrac{h+10}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}h - h = 10$$

$$\Longrightarrow \quad h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 5(2.732) = 13.66 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವು 13.66 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.25

ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಮೇಲಂತಸ್ತು ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ 14 ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬನು ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ತುದಿಯನ್ನು 60° ಉನ್ನತಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಪಾದವನ್ನು 30° ಅವನತಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

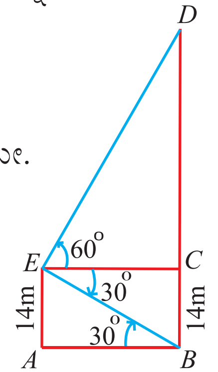
ಪರಿಹಾರ BD ಯು ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಹಡಗಿನ ಸ್ಥಾನವು A ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವು E ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಿಂದ, $AE = 14$ ಮೀ.

$AB = EC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ EC ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$\angle ABE = 30^\circ, \angle DEC = 60^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABE$ ಯಲ್ಲಿ, $\qquad \tan 30^\circ = \dfrac{AE}{AB}$



ಚಿತ್ರ 7.18

$$\therefore \quad AB = \frac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $EC = 14\sqrt{3}$ $(\because AB = EC)$

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DEC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$

$$\therefore \quad CD = EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಎತ್ತರ, $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$ ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.26

ನೆಲದ ಮೇಲಿನ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. 15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಅಡ್ಡವಾದ ಹಾರಾಟದ ನಂತರ, ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಮಾನವು 200 ಮೀ./ಸೆ. ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ವಿಮಾನವು ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವು A ಆಗಿರಲಿ.

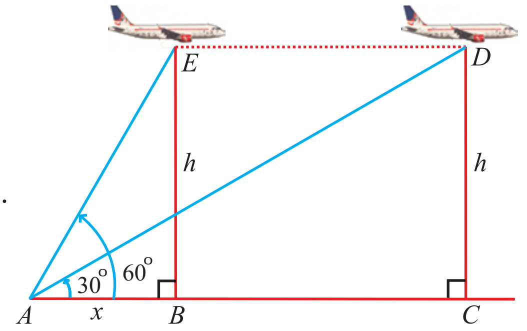
E ಮತ್ತು D ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆರಂಭದ ಮತ್ತು 15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರದ ವಿಮಾನದ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಲಿ.

BE ಮತ್ತು CD ಗಳು ವಿಮಾನವು ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

$\angle DAC = 30^\circ$, $\angle EAB = 60^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$BE = CD = h$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

$AB = x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.19

15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ,

$ED = 200 \times 15 = 3000$ ಮೀ. (ಚಲಿಸಿದ ದೂರ = ವೇಗ $\times$ ಕಾಲ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $BC = 3000$ ಮೀ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\implies CD = AC \tan 30^\circ$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = (x + 3000)\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

ಲಂಬಕೋನ $\triangle EAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$\implies BE = AB \tan 60^\circ \implies h = \sqrt{3}\, x$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $\sqrt{3}x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$\implies 3x = x + 3000 \implies x = 1500$ ಮೀ.

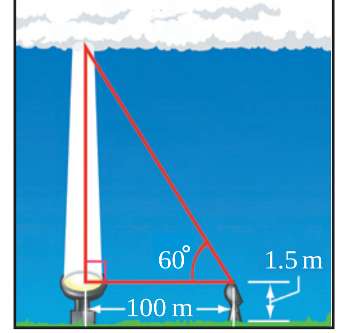
ಆಗ, (2) ರಿಂದ, $h = 1500\sqrt{3}$ ಮೀ.

ವಿಮಾನವು ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರವು $1500\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. ಒಂದು ಚಲಿಸುವ ಟ್ರಕ್ಕಿನ ಹೊರೆಯನ್ನು ಇಳಿಸಲು ಬಳಸಿದ ಇಳಿವೋರೆಯು 30° ಉನ್ನತಿ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇಳಿವೋರೆಯ ತುದಿಯು ನೆಲಮಟ್ಟದಿಂದ 0.9ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಇಳಿವೋರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ದೀಪ ಕಂಬದ ಮುಂದೆ 150ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯು ನಿಂತಿದ್ದು, $150\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಅವಳ ನೆರಳು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತಿದೆ. ದೀಪ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. A ಮತ್ತು B ಕೀಟಗಳೆರಡು 2ಮೀ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯವರೆಗೆ ಶಬ್ದವನ್ನು ಆಲಿಸಬಲ್ಲವು ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. A ಕೀಟವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 1ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿದ್ದು, ಗೋಡೆಯ ಮೇಲಿರುವ B ಕೀಟವನ್ನು ಒಂದು ಜೇಡವು ತಿನ್ನಲು ಹವಣಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿತು. A ಯು B ಗೆ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಮತ್ತು A ನಿಂದ B ನ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆದರೆ, ಜೇಡಕ್ಕೆ ಆಹಾರ ದೊರಕುವುದೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ? (A ಯು ಎಚ್ಚರಿಸುವುದನ್ನು B ಯು ಆಲಿಸಿದರೆ ಅದು ತಪ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)
4. ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಒಬ್ಬ ವೀಕ್ಷಕರು ಒಂದು ರಾತ್ರಿ ಮೋಡಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆ ದೀಪವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರು. ಚುಕ್ಕೆ ದೀಪದಿಂದ 100ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ನೆಲದಿಂದ 1.5ಮೀ. ಮೇಲೆ ಜೋಡಿಸಿರುವ ಮೋಜಣಿದರ್ಶಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಎಂಬುದಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದರು. ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ? (ಸುಳಿವು : ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ)

   (ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಘನ ಮೋಡಗಳು ಇರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಮಾನ ನಿಲ್ದಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಸುರಕ್ಷಿತ ಹಾರಾಟಕ್ಕಾಗಿ ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯು ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ರಾತ್ರಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಚುಕ್ಕೆಯ ದೀಪವನ್ನು ಮೋಡಗಳ ಪಾದಕ್ಕೆ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಪ್ರಕಾಶಿಸುವುದರಿಂದ ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಬಹುದು.)



ಚಿತ್ರ 7.20

5. 40ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಲೋಲಕವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂದೋಲನದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗುಂಡಿನ ಆರಂಭಿಕ ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಅಂತರವೇನು?
6. ಪರಸ್ಪರ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಮರಗಳಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಕಾಗೆಗಳು 15 ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿವೆ. ಅವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವಡೆಯನ್ನು (ಒಂದು ತಿನಿಸು) ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 60° ಅವನತಿ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತವೆ. ಅವು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಸರಳ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ವಡೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಹಾರಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪಕ್ಷಿಯು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುತ್ತದೆ?
7. ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. PQ ರೇಖೆಯು ದೀಪ ಕಂಬದ ಪಾದದಲ್ಲಿ 90° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವಂತೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಸರಹದ್ದಿನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗೂ P ನಿಂದ ದೀಪ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿರಲಿ. $PQ = 30$ ಮೀ. ಆದರೆ, ದೀಪ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 700 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ನದಿಯ ಎರಡು ದಡಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದನು. ವಸ್ತುಗಳ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 45° ಆದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)
9. ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ X ವ್ಯಕ್ತಿಯು 30° ಉನ್ನತಿ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಅವನಿಂದ 100 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಕ್ಷಿಯು ಹಾರುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. 20 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಇನ್ನೊಬ್ಬ Y ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 45°

ಉನ್ನತಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪಕ್ಷಿಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಬ್ಬರೂ ಪಕ್ಷಿಯ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿದ್ದರೆ, Y ನಿಂದ ಪಕ್ಷಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ದೃಷ್ಟಿಯ ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಯಿಂದ 1.5 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪುಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾನೆ. ಚಿತ್ರದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30°. ಚಿತ್ರವು ಈತನಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣದಿರುವುದರಿಂದ, ಇವನು ಕಪ್ಪುಹಲಗೆಯ ಕಡೆಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು 45° ಉನ್ನತಿ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾನೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು 30 ಮೀ. ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಮತ್ತು ನೆಲದಿಂದ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟವು 1.5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಗಿರುವ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಯಿಂದ 60° ಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. 200 ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಯಿಂದ, ದೀಪದ ಮನೆಯನ್ನು ಕಾಯುವವನು ಒಂದೇ ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾ ನೌಕೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ದೋಣಿಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕ್ರೀಡಾ ನೌಕೆ ಮತ್ತು ದೋಣಿಗಳಿಗೆ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿವೆ. ಸುರಕ್ಷತೆಗಾಗಿ ಎರಡು ಸಮುದ್ರ ಕಾಯಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕನಿಷ್ಠ 300 ಅಡಿ ಇರಲೇಬೇಕು. ಅವು 300 ಅಡಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ, ಕಾಯುವವನು ಗಂಟೆಯನ್ನು ಬಾರಿಸಬೇಕು. ಈಗ ಕಾಯುವವನು ಗಂಟೆಯನ್ನು ಬಾರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆಯೇ?

13. ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ಒಂದು ಬಲೂನು ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗಾಳಿಯೊಂದಿಗೆ ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದನು. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗನಿಂದ ಬಲೂನಿನ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. 2 ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ, ಅದೇ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆ. ಗಾಳಿಯ ವೇಗವು $29\sqrt{3}$ ಮೀ./ಸೆ. ಆದರೆ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಬಲೂನಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ನೇರ ರಸ್ತೆಯು ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬನು ಒಂದು ವ್ಯಾನನ್ನು 30° ಅವನತಿ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸುತ್ತಾನೆ. ವ್ಯಾನು ಏಕರೂಪ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಗೋಪುರದ ಕಡೆಗೆ ಬರುತ್ತಿದೆ. 6 ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ, ವ್ಯಾನಿನ ಅವನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾನು ಗೋಪುರವನ್ನು ತಲುಪಲು ಇನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ನಿಮಿಷಗಳ ಕಾಲ ಬೇಕಿದೆ?

15. ಉಪಗ್ರಹದ ಒಂದೇ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎರಡು ಭೂ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಅಳೆಯಲಾದ ಭೂಮಿಯ ಒಂದು ಕೃತಕ ಉಪಗ್ರಹದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಉಪಗ್ರಹ ಮತ್ತು ಎರಡು ಭೂ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಲಂಬ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ. ಭೂ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 4000 ಕಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಉಪಗ್ರಹ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)

16. 60 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. 40 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ದೀಪದ ಮನೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಗೆ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಒಂದು ಸರೋವರದ 45 ಮೀ. ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಅದರ ಪ್ರತಿಫಲನದ ಅವನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ಸರೋವರದ ಮೇಲ್ಮೈನಿಂದ ವಿಮಾನಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

   (A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

2. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

3. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

4. $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta+\cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

   (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) -1

5. $1-\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta} =$

   (A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\cos^4 x-\sin^4 x =$

   (A) $2\sin^2 x-1$ (B) $2\cos^2 x-1$ (C) $1+2\sin^2 x$ (D) $1-2\cos^2 x$.

7. $\tan\theta = \dfrac{a}{x}$ ಆದರೆ, $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ ನ ಬೆಲೆಯು

   (A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

8. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ ಆದರೆ, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ ನ ಬೆಲೆಯು

   (A) 1 (B) -1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

9. $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta+\tan\theta} =$

   (A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

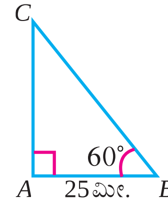
10. $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

   (A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) -1 (D) $\sin\theta$

11. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AC =$

   (A) 25 ಮೀ. (B) $25\sqrt{3}$ ಮೀ.

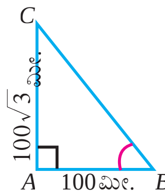
   (C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ ಮೀ. (D) $25\sqrt{2}$ ಮೀ.



12. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle ABC =$

   (A) 45° (B) 30°

   (C) 60° (D) 50°



13. ಒಬ್ಬನು ಒಂದು ಗೋಪುರದಿಂದ 28.5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟವು ನೆಲದಿಂದ 1.5 ಮೀ. ಮೇಲಿದೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 45° ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು

(A) 30 ಮೀ. (B) 27.5 ಮೀ. (C) 28.5 ಮೀ. (D) 27 ಮೀ.

14. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\sin\theta = \frac{15}{17}$ ಆದರೆ, $BC =$

(A) 85 ಮೀ. (B) 65 ಮೀ.

(C) 95 ಮೀ. (D) 75 ಮೀ.

15. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) 0

18. $\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta} =$

(A) $\mathrm{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \mathrm{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) –9

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಪಾಲ್ ಎರ್ಡೋಸ್ (26 ಮಾರ್ಚ್, 1913 – 20 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್, 1996) ರವರು ಹಂಗೇರಿಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಎರ್ಡೋಸ್‌ರವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿನ ಸಂಶೋಧನಾ ಬರಹಗಳ ಸಮೃದ್ಧಿಶೀಲ ಪ್ರಕಾಶಕರುಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರಾಗಿದ್ದು, ಅವರನ್ನು ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಯೂಲರ್‌ರವರೊಂದಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಹೋಲಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇವರು ತಮ್ಮ ಜೀವಿತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 1,475 ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಬರಹಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ, ಯೂಲರ್‌ರವರು ಸುಮಾರು 800 ಸಂಶೋಧನಾ ಬರಹಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆ ಎಂದು ಬಲವಾಗಿ ನಂಬಿದ್ದರು ಮತ್ತು ಆಚರಣೆಯಲ್ಲಿಟ್ಟಿದ್ದರು. ಇವರು ತಮ್ಮ ಜೀವಿತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ 511 ವಿಭಿನ್ನ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರು.

8

ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ

Measure what is measurable, and make measurable what is not so

-Galileo Galilei

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ
  - ❖ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ
  - ❖ ಶಂಕು
  - ❖ ಗೋಳ
- ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಘನಫಲಗಳು



ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ.287 - ಕ್ರಿ.ಪೂ.212) ಗ್ರೀಕ್

ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್‌ರನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅವರು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

8.1 ಪೀಠಿಕೆ

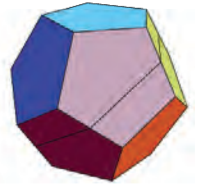
ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು, ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹಾಗೂ ಘನವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸುವ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಭಾಗವನ್ನು "ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವಸ್ತುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವು ಅವಶ್ಯಕವಾದುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಅನೇಕ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಮತಲ, ಬಹುಮುಖ ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಹಾಗೂ ಘನಗಳ ಕೆಲವು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಗೋಳ) ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು ನ್ಯಾನೋ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವ ಗಾತ್ರದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಆಧಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನ್ಯಾನೋ ವಿಜ್ಞಾನದ ಬಹುದೊಡ್ಡ ಕಲ್ಪನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕು, ಗೋಳಗಳಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮತ್ತು ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

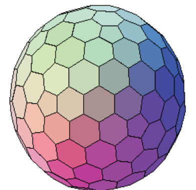
8.2 ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Surface Area)

ಸಿರಾಕ್ಯೂಸ್‌ನ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್, ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿದ್ದು, ಅವರು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಸುತ್ತುವರಿದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲದ ಮೂರನೇ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಇದನ್ನು ತನ್ನ ಅತೀ ಮಹತ್ವದ ಸಾಧನೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರು. ಅವರು ಪರವಲಯದ ಕಂಸದ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಳಲಿಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು.



ಚಿತ್ರ 8.1

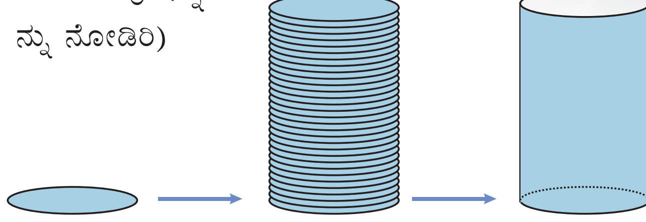
ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯ ತೆರೆದಿಟ್ಟ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 3–ಆಯಾಮ ವಸ್ತುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹೊರಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರಗಳು ಕೆಲವು ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.2

8.2.1 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ (Right Circular Cylinder)

ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಅಳತೆಯ ಹಲವು ವೃತ್ತೀಯ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ರಟ್ಟುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಜೋಡಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರುವುದನ್ನು ಮತ್ತು ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 8.3 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



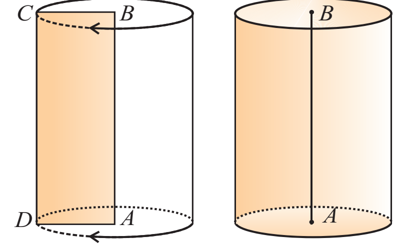
ಚಿತ್ರ 8.3

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಆಯತವು ತನ್ನ ಒಂದು ತಟಸ್ಥ ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

$ABCD$ ಯು ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿರಲಿ. ಇದು ತನ್ನ AB ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸುತ್ತನ್ನು ಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. AB ಯನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಅಕ್ಷ (axis) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. AB ಯ ಉದ್ದವು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಉದ್ದ ಅಥವಾ ಎತ್ತರವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು AD ಅಥವಾ BC ಯನ್ನು ಇದರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



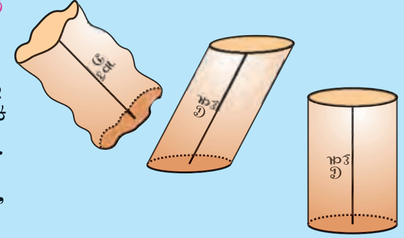
ಚಿತ್ರ 8.4

ಸೂಚನೆ

(i) ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಓರೆ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿದ್ದು ಆದರೆ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

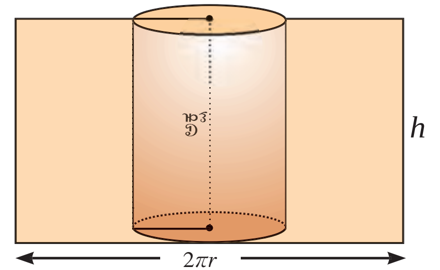
(iii) ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವೃತ್ತೀಯ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅದರ ಅಕ್ಷವು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.5

(i) ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ (ಪಾರ್ಶ್ವ) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮುಖ ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖಗಳು ಏಕಸಂಪಾತ ವೃತ್ತೀಯ ವಲಯಗಳಾಗಿದ್ದು, ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ನೇರ ಮೇಲ್ಮೈಯು ವಕ್ರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೇರ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಥವಾ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

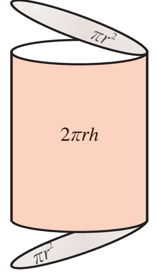


ಚಿತ್ರ 8.6

ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA = ಪಾದದ ಪರಿಧಿ $\times$ ಎತ್ತರ $= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

(ii) ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ



ಚಿತ್ರ 8.7

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA = ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + 2 × ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\times \pi r^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, TSA $= 2\pi r(h+r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

(iii) ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ (Right circular hollow cylinder)

ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆ, ರಬ್ಬರ್ ನಳಿಕೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಂತಹ ಘನಗಳು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ R ಮತ್ತು r ಗಳೊಂದಿಗೆ h ಎತ್ತರದ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗೆ,

ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA = ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

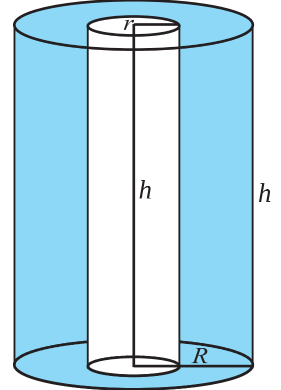
ಆದ್ದರಿಂದ, CSA $= 2\pi h(R+r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA = CSA + 2 × ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$

$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$

$\therefore$ TSA $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.8

ಗಮನಿಸಿ

ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ದಟ್ಟತೆ (ಮಂದತೆ), w = $R - r$.

ಸೂಚನೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, π ಗೆ ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $\frac{22}{7}$ ಎಂಬ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.1

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ (i) ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು (ii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

$r = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 20$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA $= 2\pi rh$

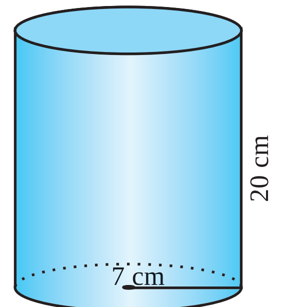
$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 880 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 1188 ಚ.ಸೆ.ಮೀ.



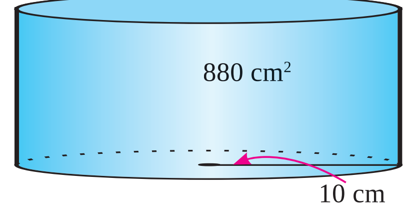
ಚಿತ್ರ 8.9

ಉದಾಹರಣೆ 8.2

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 880 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಇದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

S ಎಂಬುದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.10

$r = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $S = 880$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $S = 880 \implies 2\pi r[h + r] = 880$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h + 10] = 880$$

$$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$$

$$\implies h + 10 = 14$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ, $h = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4 = \frac{1760}{7}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 251\frac{3}{7}$ ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ :

CSA $=$ TSA $- 2 \times$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 880 - 2 \times \pi r^2$

$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$

$= \frac{1760}{7} = 251\frac{3}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.3

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 2 : 5 ಮತ್ತು ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{3960}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $r : h = 2 : 5 \implies \frac{r}{h} = \frac{2}{5}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $r = \frac{2}{5}h$

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ , CSA $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 15 \implies r = \frac{2}{5}h = 6.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರವು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.4

120 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ರೋಡ್ ರೋಲರ್‌ನ ವ್ಯಾಸವು 84 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದು ಒಂದು ಆಟದ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿಸಲು 500 ಪೂರ್ಣ ಸುತ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರಿಗೆ 75 ಪೈಸೆಯಂತೆ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ $r = 42$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 120$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸುತ್ತಿನಲ್ಲಿ ರೋಲರ್ ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ರೋಡ್ ರೋಲರ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$

$= 31680$ ಸೆಂ.ಮೀ^{2}.

ಚಿತ್ರ 8.11

500 ಸುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ರೋಲರ್ ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 31680 \times 500$

$= 15840000$ ಸೆಂ.ಮೀ^{2}.

$= \frac{15840000}{10000} = 1584$ ಸೆಂ.ಮೀ^{2}. (10,000 ಸೆಂ. ಮೀ^{2} = 1 ಚ.ಮೀ)

1 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ $\frac{75}{100}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಟದ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟು ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $= \frac{1584 \times 75}{100}$ = ₹ 1188.

ಉದಾಹರಣೆ 8.5

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಒಳ ಮತ್ತು ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

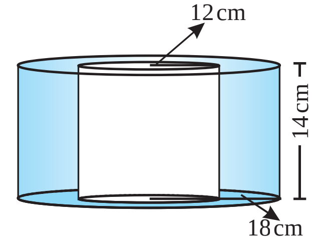
ಪರಿಹಾರ r, R ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

$r = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ., $R = 18$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA $= 2\pi h(R+r)$

ಆದ್ದರಿಂದ, CSA $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18 + 12)$

$= 2640$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.12

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA $= 2\pi(R + r)(R - r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18 + 12)(18 - 12 + 14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3771\frac{3}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

8.2.2 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು (Right Circular Cone)

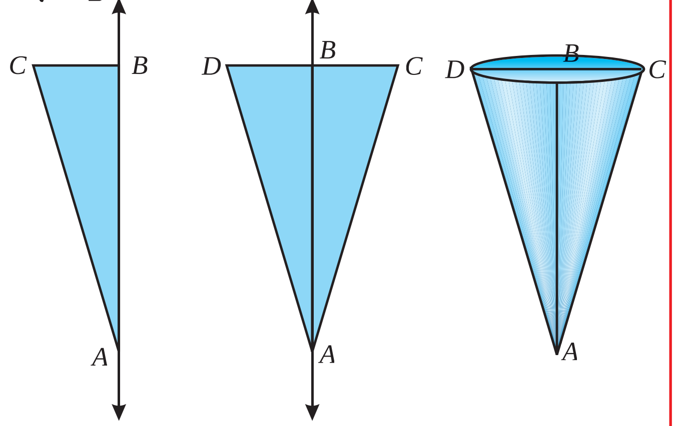
ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಐಸ್ ಕ್ರೀಮ್ ಜಾಡಿ, ತೇರಿನ ಮೇಲ್ತುದಿ, ಸರ್ಕಸ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಹಾಸ್ಯಗಾರನ ಟೋಪಿ, ಮೆಹೆಂದಿ ಜಾಡಿಗಳಂತಹ ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಬಹುಶಃ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು ನೇರ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಶಂಕುವು ಒಂದು ಸಮತಟ್ಟಾದ ಪಾದದಿಂದ ಶೃಂಗ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ನಯವಾಗಿ ಗೋಪುರಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನೇರ ಎಂದರೆ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಅಕ್ಷವು ಅದರ ಸಮತಲದೊಂದಿಗೆ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತೀಯ ಎಂದರೆ ಪಾದವು ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂಬರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಶಂಕುವಿನ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ ಒಂದು ಮಂದವಾದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯನ್ನು B ನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮೂಲಕ (AB ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಒಂದು ಉದ್ದವಾದ ದಪ್ಪನೆಯ ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಕೈಗಳಿಂದ ತಂತಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ತಂತಿಯ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸುತ್ತಿರಿ.

ಏನಾಯಿತು? ತಂತಿಯ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸುತ್ತಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಆಕಾರವನ್ನು ನೀವು ಗುರುತಿಸುವಿರಾ?. ಉಂಟಾದ ಆಕಾರವು ಲಂಬ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯನ್ನು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ AB ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ 360° ಗೆ ಸುತ್ತಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನವನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.13

AB ಉದ್ದವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

BC ಉದ್ದವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ($BC = r$).

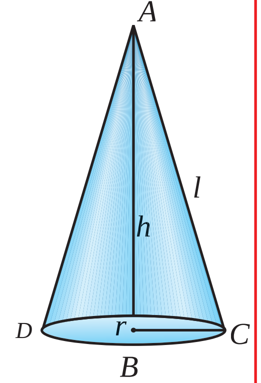
AC ಉದ್ದವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ l ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ($AC = AD = l$).

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{(ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ)}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$



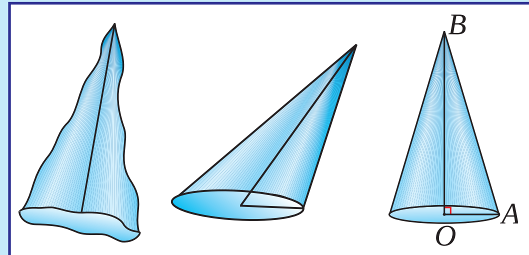
ಚಿತ್ರ 8.14

ಸೂಚನೆ

(i) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು **ಓರೆ ಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು **ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iii) ಶೃಂಗವು ವೃತ್ತೀಯ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದು **ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

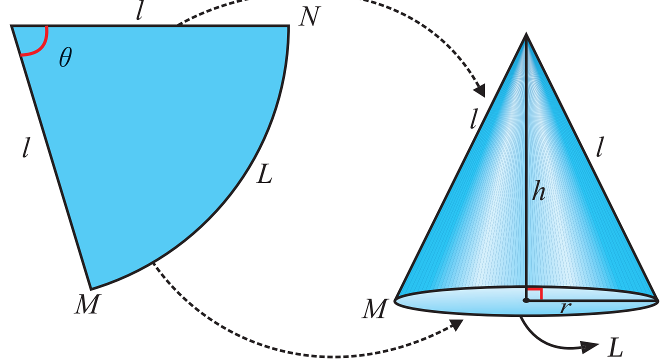


ಚಿತ್ರ 8.15

(i) ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಜ್ಯ l ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ θ° ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. L ಎಂಬುದು ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಆಗ, $\frac{2\pi l}{L} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ}$

$$\Longrightarrow \quad L = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \qquad (1)$$



ಚಿತ್ರ 8.16

ಈಗ, ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

r ಎಂಬುದು ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

ಇದರಿಂದ, $\quad L = 2\pi r$

(1) ರಿಂದ,

$$2\pi r = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\Longrightarrow \quad r = l\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಮಡಚಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ:

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ	ಶಂಕು
ತ್ರಿಜ್ಯ (l) →	ಓರೆ ಎತ್ತರ (l)
ಕಂಸದ ಉದ್ದ (L) →	ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ $2\pi r$
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ →	ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ πrl

A ಎಂಬುದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \qquad (2)$$

ಆಗ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $A = \pi l^2\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) = \pi l^2\left(\frac{r}{l}\right)$.

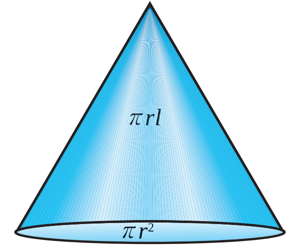
ಇದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $A = \pi rl$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

(ii) ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = { ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \pi rl + \pi r^2$$

ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r(l + r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.17

ಉದಾಹರಣೆ 8.6

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 37 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು l ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $r = 35$ ಸೆಂ.ಮೀ., $l = 37$ ಸೆಂ.ಮೀ.

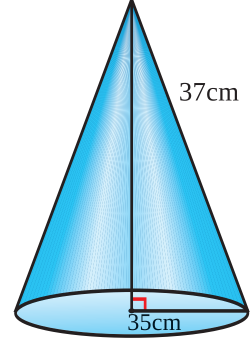
ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ , $\text{CSA} = \pi rl = \pi(35)(37)$

$\text{CSA} = 4070$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $\text{TSA} = \pi r[l+r]$

$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37+35]$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\text{TSA} = 7920$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.18

ಉದಾಹರಣೆ 8.7

O ಮತ್ತು C ಗಳು ನೇರ ವೃತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ಆಗಿರಲಿ. B ಎಂಬುದು ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle OBC = 60^o$ ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

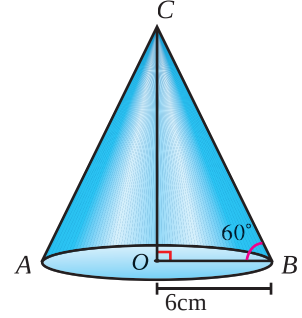
ಪರಿಹಾರ ತ್ರಿಜ್ಯ OB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle OBC = 60^o$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle OBC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$



ಚಿತ್ರ 8.19

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ $l = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle OBC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ, OC = $6\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.8

120^0 ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಮಡಚಲಾಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಎಂಬುದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಕೋನ, $\theta = 120^\circ$

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $R = 21$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಾಗಿ ಮಡಚಿದಾಗ,

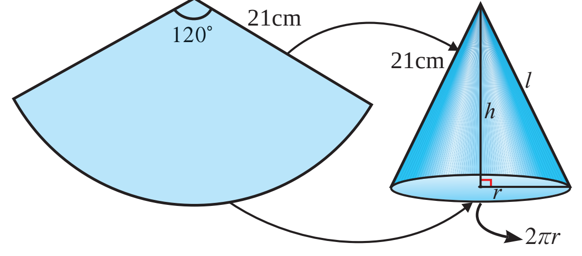
ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ= ಕಂಸದ ಉದ್ದ

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{\theta}{360^\circ} \times R$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 21$

$= 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.20

ಹಾಗೂ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ,

$l =$ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ, $l = R \Longrightarrow l = 21$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\text{CSA} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462.$$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ :

ಶಂಕುವಿನ CSA = ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi \times R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$= 462$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 462 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

8.2.3 ಗೋಳ (Sphere)

ಒಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆ(ತಟ್ಟೆ)ಯನ್ನು ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಮೂಲಕ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು **ಗೋಳ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗೋಳವು 3–ಆಯಾಮದ ವಸ್ತುವಾಗಿದ್ದು, ಇದು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

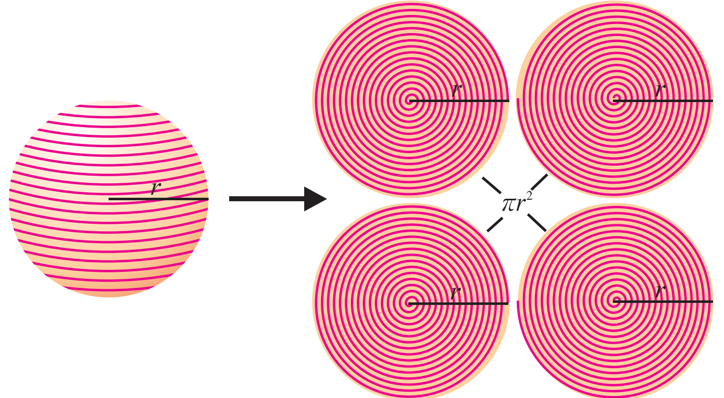
(i) ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Curved surface area of a solid sphere)

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಬಿಲ್ಲೆಯ ವ್ಯಾಸದ ಮೂಲಕ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 360^0 ಗೆ ಸುತ್ತಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವ ವಸ್ತುವು ನೋಡಲು ಚೆಂಡಿನಂತಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಹೊಸ ಘನವನ್ನು **ಗೋಳ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.

- ಒಂದು ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.
- ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಜಿಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿ.
- ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ದಾರವನ್ನು ಚೆಂಡಿನ ಸಂಪೂರ್ಣ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸುತ್ತುವರಿಯುವಂತೆ ಸುತ್ತಿರಿ.
- ದಾರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಬಳಸಿದ ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.
- ದಾರವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ.
- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ತಂತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.
- ರಚಿತವಾದ ಗೋಳ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.



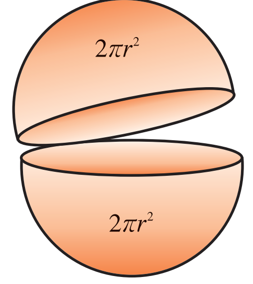
ಚಿತ್ರ 8.21

ಈಗ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = ನಾಲ್ಕು ಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA = $4 \times$ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $4 \times \pi r^2$

$\therefore$ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $4\pi r^2$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

(ii) ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳ (Solid hemisphere)



ಚಿತ್ರ 8.22

ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸಮತಲವು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಗೋಳದ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ಘನ **ಅರ್ಧ ಗೋಳ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

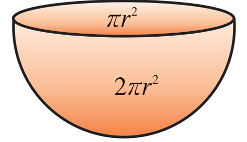
ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\dfrac{\text{ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{2}$

$= \dfrac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA = ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.23

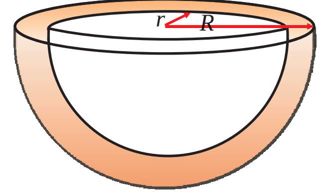
(iii) ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧ ಗೋಳ (Hollow hemisphere)

R ಮತ್ತು r ಗಳು ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

$= 2\pi(R^2 + r^2)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.24

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\left\{ \begin{array}{l} \text{ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \\ + \text{ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} \end{array} \right.$

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 8.9

7 ಮೀ. ಒಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸ್ ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನು ತನ್ನ ಸಾಹಸವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತಾನೆ. ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗೆ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \dfrac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಒಳ ವ್ಯಾಸ, $2r = 7$ ಮೀ.

ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಗೋಳದ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2$

$= \dfrac{22}{7} \times 7^2$

ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 154 ಚ.ಮೀ.

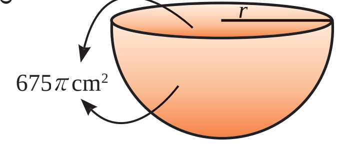
ಉದಾಹರಣೆ 8.10

ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 675π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$3\pi r^2 = 675\pi \text{ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 = 225$$



ಚಿತ್ರ 8.25

ಈಗ, ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\text{CSA} = 2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\pi \text{ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

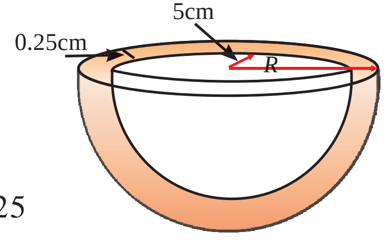
ಉದಾಹರಣೆ 8.11

ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಟ್ಟಲಿನ ಮಂದವು 0.25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಬಟ್ಟಲಿನ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಬಟ್ಟಲಿನ ಹೊರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r, R ಮತ್ತು w ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಟ್ಟಲಿನ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಮಂದ ಆಗಿರಲಿ.

$r = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $w = 0.25$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad R = r + w = 5 + 0.25 = 5.25 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$



ಚಿತ್ರ 8.26

ಈಗ, ಬಟ್ಟಲಿನ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಟ್ಟಲಿನ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 173.25$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 660 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4400 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 110 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಭವನವು 12 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 50 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 3.5 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 20 ರಂತೆ ಸ್ಥಂಭಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 231 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೂರನೇ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1540 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತವು 3:2 ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 5:3 ಆಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಹೊರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 540π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಆಂತರಿಕ ವ್ಯಾಸವು 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಾಕಾರದ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯ ಬಾಹ್ಯ ವ್ಯಾಸವು 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಇದರ ಉದ್ದವು 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಕೊಳವೆಯ ಮಂದವು 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಕೊಳವೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 236 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ಭತ್ತದ ರಾಶಿಯು ಶಂಕುವಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿದ್ದು ಇದರ ವ್ಯಾಸವು 4.2 ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 2.8 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಳೆಯಿಂದ ರಕ್ಷಿಸಲು ಬಟ್ಟೆಯಿಂದ ನಿಖರವಾಗಿ ಮುಚ್ಚಬೇಕಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಯ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 180^0 ಮತ್ತು 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸೇರಿಸಿ ಟೊಳ್ಳು ಶಂಕುವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 3:5 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 60π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 2772 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 98.56 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಎರಡು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತವು 3:5 ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಅರ್ಧ ಗೋಳೀಯ ಗುಮ್ಮಟದ ಒಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದರ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 17.6 ಮೀ. ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹5 ರ ದರದಂತೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8.3 ಘನಫಲ (Volume)

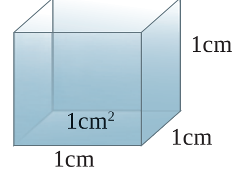
ನಾವು ಇದುವರೆಗೆ ಕೆಲವು ಘನ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಕೆಲವು ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವ ಘನ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಕಲಿಯೋಣ. ಘನಫಲವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ 'ತುಂಬಿದ ಪ್ರದೇಶದ ಪರಿಮಾಣ' ಆಗಿದೆ. ಘನ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವು ಘನದ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಏಕಮಾನ ಘನದ (ಏಕಮಾನ ಬಾಹುವಿನ ಘನ) ಪರಿಮಿತಿ ಗಣಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಘನಫಲವು ಈ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಘನದ ಘನಫಲ

$= $ ಉದ್ದ $\times$ ಅಗಲ $\times$ ಎತ್ತರ

$= 1$ ಸೆಂ.ಮೀ. $\times 1$ ಸೆಂ.ಮೀ. $\times 1$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= 1$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.27

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವು 100 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಿದರೆ ಅದು ನಮಗೆ ಈ ವಸ್ತುವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಲು 1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಘನಫಲವಿರುವ 100 ಘನಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಂತೆಯೇ, ಘನಫಲವು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

8.3.1 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ (Volume of a right circular cylinder)

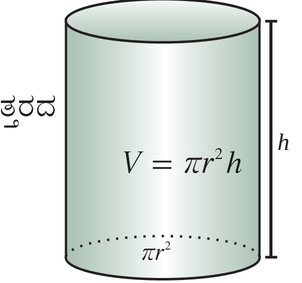
(i) ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಗುಣಲಬ್ದವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ, $V =$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ

$$= \pi r^2 \times h$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ, $V = \pi r^2 h$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.28

(ii) ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

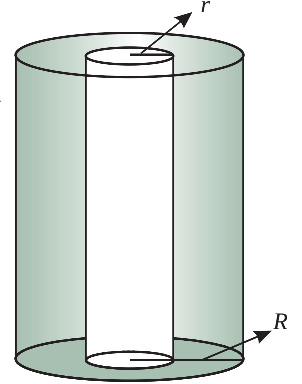
R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು h ಎಂಬುದು ಇದರ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಘನಫಲ, $V =$ ಹೊರ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ - ಒಳ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

$$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

ಇದರಿಂದ, ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ,

$V = \pi h(R^2 - r^2)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.29

ಉದಾಹರಣೆ 8.12

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

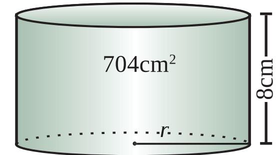
$h = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು CSA $= 704$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, CSA $= 704$

$\Longrightarrow \quad 2\pi rh = 704$

$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$

$\therefore \quad r = \frac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.30

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ, $V = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$

$= 4928$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಇದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $= 4.928$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು. (1000 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. = l ಲೀಟರ್)

ಉದಾಹರಣೆ 8.13

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವು 28 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ವ್ಯಾಸಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು 1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಬ್ಬಿಣದ ತೂಕವು 7 ಗ್ರಾಂ ಆದರೆ, ಕೊಳವೆಯ ತೂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r, R ಮತ್ತು h ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕೊಳವೆಯ ಒಳ, ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

$2r = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $2R = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 28$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲ, $V = \pi \times h \times (R+r)(R-r)$

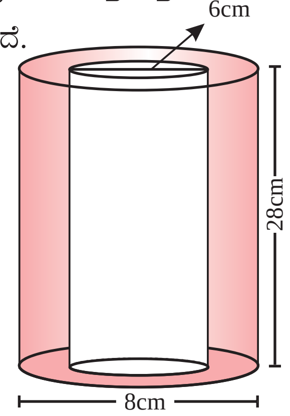
$= \frac{22}{7} \times 28 \times (4+3)(4-3)$

$\therefore$ ಘನಫಲ, $V = 616$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಲೋಹದ ತೂಕ $= 7$ ಗ್ರಾಂ

616 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಲೋಹದ ತೂಕ $= 7 \times 616$ ಗ್ರಾಂ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಳವೆಯ ತೂಕ $= 4.312$ ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂಗಳು



ಚಿತ್ರ 8.31

ಉದಾಹರಣೆ 8.14

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 13.86 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 69.3 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ A ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

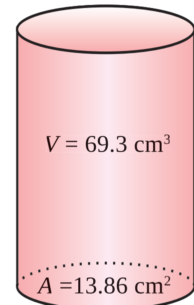
ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $A = \pi r^2 = 13.86$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಮತ್ತು ಘನಫಲ, $V = \pi r^2 h = 69.3$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\pi r^2 h = 69.3$

$\Longrightarrow 13.86 \times h = 69.3$

$\therefore$ $h = \frac{69.3}{13.86} = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.32

ಈಗ, ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = 13.86$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$

$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41 \Longrightarrow r = \sqrt{4.41} = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $CSA = 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, $CSA = 66$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

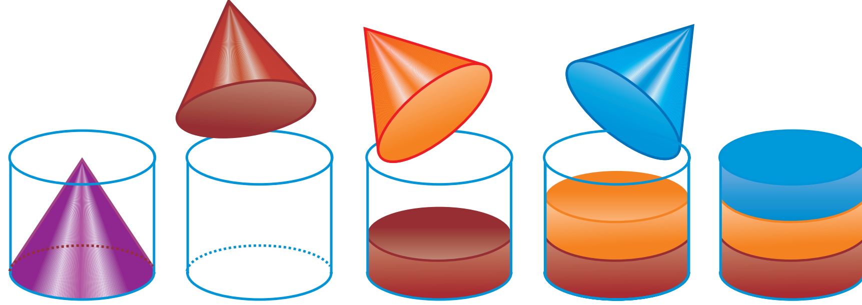
8.3.2 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ (Volume of a right circular cone)

r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕು ಮತ್ತು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮರಳು ಅಥವಾ ದ್ರವದಿಂದ ಶಂಕುವನ್ನು ತುಂಬಿರಿ ಮತ್ತು ನಂತರ ಅದನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸುರಿಯಿರಿ. ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದಾಗ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮರಳು / ದ್ರವದಿಂದ ಮೂರನೇ ಬಾರಿ ತುಂಬುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.33

ಈ ಸರಳ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ, r ಮತ್ತು h ಗಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾದರೆ,

$3 \times$ (ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ) = ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 8.15

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 4928 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r, h ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

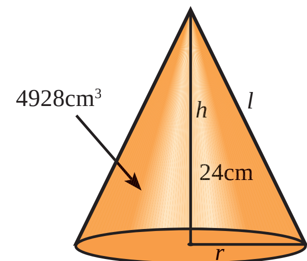
$V = 4928$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 24$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆಗ, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$

$\Longrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 4928$

$\Longrightarrow r^2 = \frac{4928 \times 3 \times 7}{22 \times 24} = 196.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = \sqrt{196} = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.



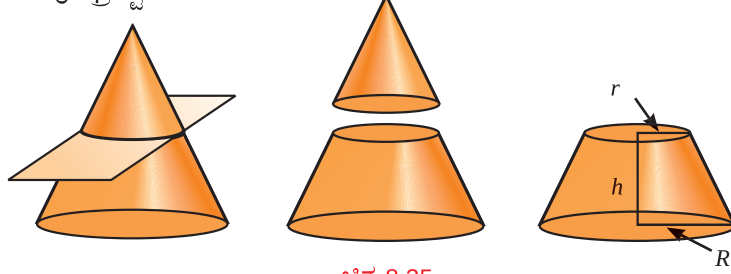
ಚಿತ್ರ 8.34

8.3.3 ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ (Volume of a Frustum of a Cone)

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಎರಡು ಘನಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಸ್ವಲ್ಪ ಜೇಡಿಮಣ್ಣನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಚಾಕುವಿನಿಂದ ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಉಳಿಯುವುದೇನು? ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಫ್ರಸ್ಟಮ್ ಎಂಬ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದದ ಅರ್ಥವು "ಕತ್ತರಿಸಿದ ತುಂಡು" ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಬಹುವಚನವು ಫ್ರಸ್ಟಾ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.35

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಪಾದವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಶಂಕುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಛಿನ್ನಕವು ಎರಡು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ.

ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ ಎಂಬುದು ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.35ನ್ನು ನೋಡಿ). ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಒಂದು ಛಿನ್ನಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

R ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

r ಮತ್ತು x ಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನಿಂದ ಛಿನ್ನಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದ ನಂತರ ಪಡೆದ ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

h ಎಂಬುದು ಛಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ, V = ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ – ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$$= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times(x+h) - \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2 h]$. (1)

ಚಿತ್ರ 8.36 ರಿಂದ, $\Delta BFE \sim \Delta DGE$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

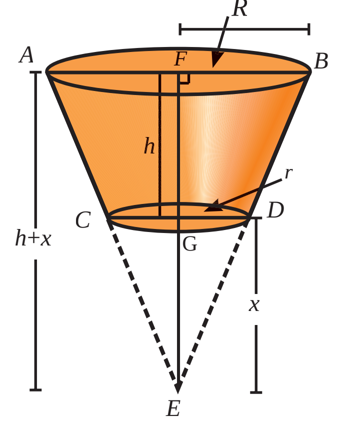
$$\therefore \quad \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$

$\Longrightarrow \quad x(R-r) = rh$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad x = \dfrac{rh}{R-r} \qquad (2)$



ಚಿತ್ರ 8.36

ಈಗ, (1) $\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2h]$

$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2h]$

$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2h]$ (2) ನ್ನು ಬಳಸಿ

ಇದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ,

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) \text{ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.}$$

ಸೂಚನೆ

* ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi(R+r)l$. ಇಲ್ಲಿ, $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

* ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$, ಇಲ್ಲಿ, $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

* (ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಬಳಸುವಂತಿಲ್ಲ)

ಉದಾಹರಣೆ 8.16

ಛಿನ್ನಕ ಆಕಾರದ ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತೀಯ ತುದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಆಳವು 63 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತೀಯ ತುದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು h ಎಂಬುದು ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಆಳ ಆಗಿರಲಿ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $R = 15$ ಸೆಂ.ಮೀ., $r = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 63$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.37

(ಛಿನ್ನಕ) ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$

$= 26994$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$= \frac{26994}{1000}$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು (1000 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.= 1 ಲೀಟರ್)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ= 26.994 ಲೀಟರ್‌ಗಳು.

8.3.4 ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a sphere)

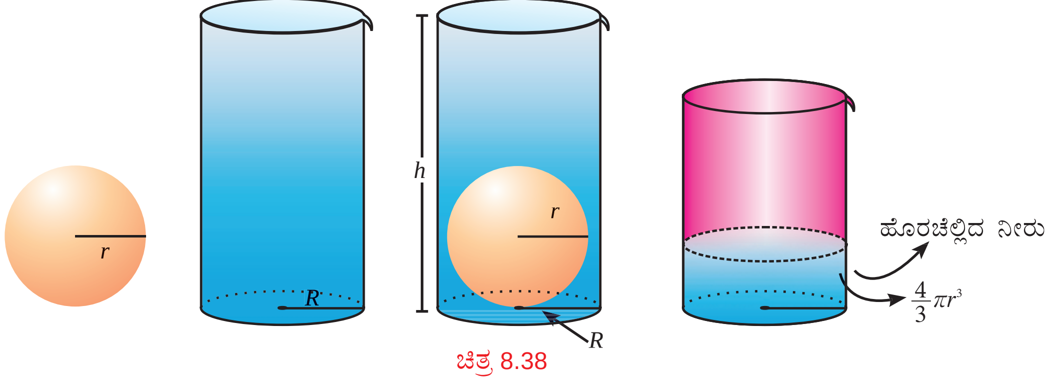
(i) ಘನ ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a Solid Sphere)

ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಪ್ರಯೋಗವು ಗೋಳದ ಘನಫಲ, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

R ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು h ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಒಂದು ಜಾಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಜಾಡಿಗೆ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿರಿ. $R > r$ ಆಗಿರುವಂತೆ r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಘನಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ಘನಫಲ, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.38

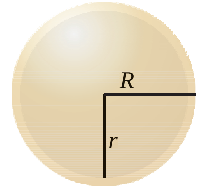
(ii) ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a hollow sphere)

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಒಳ ಮತ್ತು ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ r ಮತ್ತು R ಆದರೆ,

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ = ಹೊರ ಗೋಳದ ಘನಫಲ – ಒಳ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



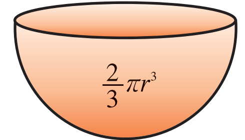
ಚಿತ್ರ 8.39

(iii) ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a solid hemisphere)

ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{2} \times$ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.40

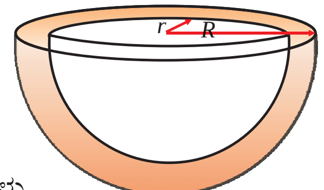
(iv) ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a hollow hemisphere)

ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ = ಹೊರ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

– ಒಳ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times r^3$$

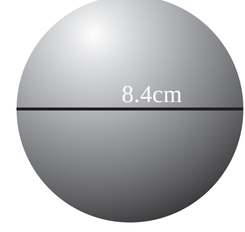
$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.41

ಉದಾಹರಣೆ 8.17

ಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲೋಹದ ಗುಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವು 8.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 8.42

ಪರಿಹಾರ r ಎಂಬುದು ಲೋಹದ ಗುಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $2r = 8.4$ ಸೆಂ.ಮೀ. $\Longrightarrow r = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಗುಂಡಿನ ಘನಫಲ, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಂಡಿನ ಘನಫಲ $= 310.464$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

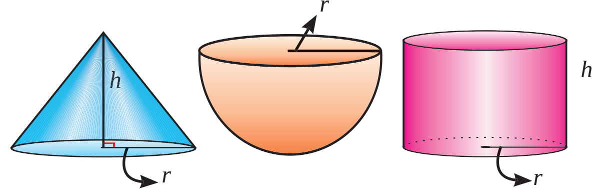
ಉದಾಹರಣೆ 8.18

ಒಂದು ಶಂಕು, ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳು ಸಮನಾದ ಪಾದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಶಂಕು ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ r ಎಂಬುದು ಶಂಕು, ಅರ್ಧ ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

h ಎಂಬುದು ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

$r = h$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.43

V_1, V_2 ಮತ್ತು V_3 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶಂಕು, ಅರ್ಧ ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$

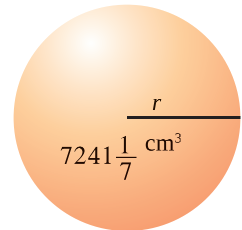
$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3$ (ಇಲ್ಲಿ, $r = h$)

$\Longrightarrow V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$

ಇದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಅನುಪಾತವು $1 : 2 : 3$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.19

ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $7241\frac{1}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 8.44

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $V = 7241\frac{1}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$r^3 = \frac{50688}{7} \times \frac{3 \times 7}{4 \times 22}$$

$$= 1728 = 4^3 \times 3^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.20

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $\frac{11352}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಳದ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

V ಯು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲವಾಗಿರಲಿ.

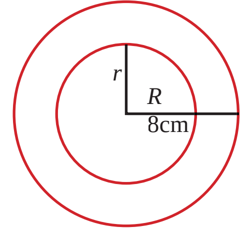
ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $V = \frac{11352}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \implies r^3 = 125 = 5^3$$

ಇದರಿಂದ, ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.45

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಆಸ್ಪತ್ರೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ರೋಗಿಗೆ ಪ್ರತಿ ನಿತ್ಯ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಬಟ್ಟಲಿನಲ್ಲಿ ಕಷಾಯವನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆ ಬಟ್ಟಲಿನಲ್ಲಿ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರದವರೆಗೆ ಕಷಾಯವನ್ನು ತುಂಬಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ದಿನ ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ 250 ರೋಗಿಗಳಿಗೆ ನೀಡಲು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ ಕಷಾಯವನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?
3. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಮೊತ್ತವು 37 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1628 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು 62.37 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತವು 2:3 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 5:3 ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 5:7 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಘನಫಲವು 4400 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. 66 ಸೆಂ.ಮೀ. X 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯಿರುವ ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಲೋಹದ ತಗಡನ್ನು ಸುತ್ತಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಉದ್ದವು 28 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 3 ಮಿ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಮರದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 29 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 12 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಮರದ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 44 ಮೀ. ಆದರೆ, ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವು $\frac{5676}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ತುದಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು 44 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8.4π ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಆಳವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. 5 ಸೆಂ.ಮೀ., 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ, ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಅನುಪಾತವು 2:3 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಘನಫಲವು 100.48 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

15. ವೃತ್ತೀಯ ಪಾದದೊಂದಿಗಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 216π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ 200 ಉಕ್ಕಿನ ಗೋಳೀಯ ಗುಂಡುಗಳ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಉಕ್ಕಿನ ಸಾಂದ್ರತೆಯು 7.95 ಗ್ರಾಂ/ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. (ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = ಘನಫಲ $\times$ಸಾಂದ್ರತೆ)

17. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು 1152π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

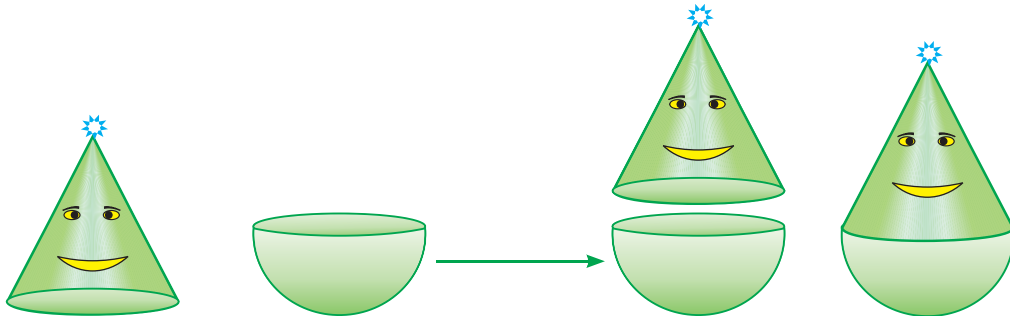
19. 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂಚನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಲೂನಿಗೆ ಗಾಳಿಯನ್ನು ತುಂಬಿದಾಗ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಲೂನಿನ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8.4 ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆ (Combination of Solids)

ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿರುವ ಗೊಂಬೆಗಳು, ವಾಹನಗಳು, ಪಾತ್ರೆಗಳು, ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಂತಹ ಹಲವಾರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?



ಚಿತ್ರ 8.46

ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಯೋಜಿಸಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸಂಯೋಜಿತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಂಯೋಜಿತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಯೋಜಿಸಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ,

ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
+ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಘನಫಲ = ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ + ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.21

ಒಂದು ಮರದ ಘನ ಗೊಂಬೆಯು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹಾಗೂ ಗೊಂಬೆಯ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 17.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೊಂಬೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಮರದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

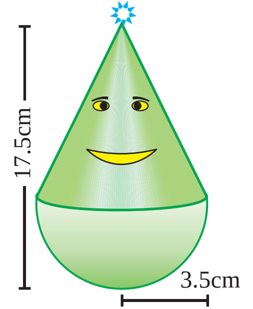
ಪರಿಹಾರ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯ $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯ , $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಎತ್ತರ, $h = 17.5 - 3.5 = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.47

ಮರದ ಘನಫಲ = ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ + ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

ಇದರಿಂದ, ಗೊಂಬೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಮರದ ಘನಫಲ = 269.5 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.22

ಒಂದು ಲೋಟವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 11.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

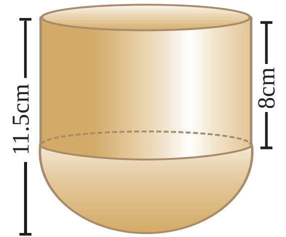
ತ್ರಿಜ್ಯ , r = ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ $- 8$

$\Longrightarrow r = 11.5 - 8 = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

ಎತ್ತರ , $h = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= \frac{7}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.48

ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = { ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗದ CSA + ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಭಾಗದ CSA

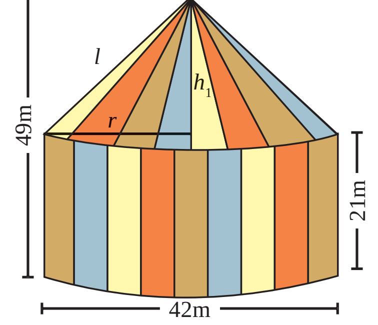
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

$\therefore$ ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 253 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.23

ಒಂದು ಸರ್ಕಸ್ ಡೇರೆಯನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಡೇರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 49 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 42ಮೀ. ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರವು 21 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಚ.ಮೀ. ಬಟ್ಟೆಗೆ ₹12.50 ರಂತೆ ಖರ್ಚಾದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಗೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 8.49

ಪರಿಹಾರ

ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ	ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ
ವ್ಯಾಸ, $2r = 42$ ಮೀ.	ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 21$ ಮೀ.
ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 21$ ಮೀ.	ಎತ್ತರ, $h_1 = 49 - 21 = 28$ ಮೀ.
ಎತ್ತರ, $h = 21$ ಮೀ.	ಓರೆ ಎತ್ತರ, $l = \sqrt{h_1^2 + r^2}$

$$= \sqrt{28^2 + 21^2}$$
$$= 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35 \text{ ಮೀ.}$$

ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ CSA + ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ CSA

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$
$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

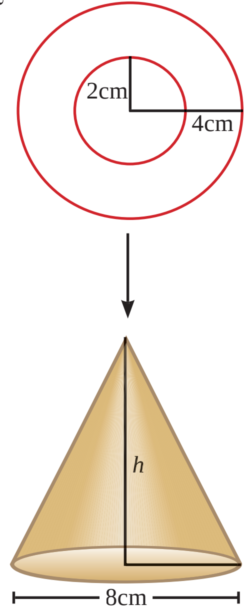
$\therefore$ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 5082 ಚ.ಮೀ.

ಈಗ, ಪ್ರತಿ ಚ.ಮೀ. ಬಟ್ಟೆಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು = ₹12.50

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಟ್ಟೆಯ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ = 5082×12.5 = ₹63525.

ಉದಾಹರಣೆ 8.24

ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ವ್ಯಾಸಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಇನ್ನೊಂದು ಘನವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.50

ಪರಿಹಾರ R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

h ಮತ್ತು r_1 ಗಳು ತಯಾರಿಸಿದ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಆಗಿರಲಿ.

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳ		
ಹೊರಗಿನ	ಒಳಗಿನ	ಶಂಕು
$2R = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$2r = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$2r_1 = 8$
$\Longrightarrow R = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$\Longrightarrow r = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$\Longrightarrow r_1 = 4$

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿದಾಗ ಮತ್ತು ಘನ ಶಂಕುವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, ನಮಗೆ

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3-2^3)$$

$$\Longrightarrow \quad h = \frac{64-8}{4} = 14$$

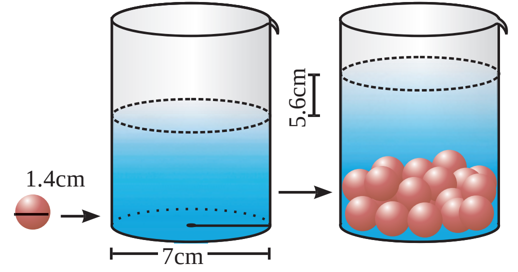
ಇದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ, $h = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.25

ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವ್ಯಾಸವು 1.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಗೋಳಾಕಾರದ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿರುವ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಬೀಕರ್‌ಗೆ ಬೀಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಕರ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು 5.6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಏರಿಕೆಯಾಗಲು ಬೀಕರ್‌ನೊಳಗೆ ಬೀಳಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ n ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. r_1 ಮತ್ತು r_2 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಬೀಕರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಗೋಲಿಗಳು	ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಬೀಕರ್
ವ್ಯಾಸ, $2r_1 = 1.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.	ವ್ಯಾಸ, $2r_2 = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.
ತ್ರಿಜ್ಯ, $r_1 = 0.7$ ಸೆಂ.ಮೀ.	ತ್ರಿಜ್ಯ, $r_2 = \frac{7}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.51

h ಎಂಬುದು ಏರಿಕೆಯಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $h = 5.6$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಬೀಕರ್‌ನೊಳಗೆ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಬೀಳಿಸಿದ ನಂತರ,

ಏರಿಕೆಯಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ $=$ n ಗೋಲಿಗಳ ಘನಫಲ

$$\Longrightarrow \quad \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$n = \frac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$$

$$n = \frac{3\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times5.6}{4\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}} = 150.$$

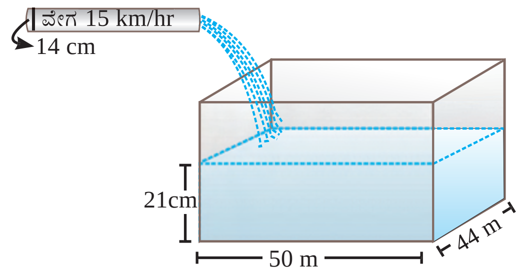
$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 150 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.26

14 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ 50 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 44 ಮೀ. ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆಯ ವೇಗದಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಹರಿಯಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಏರಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ನೀರಿನ ವೇಗ $= 15$ ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆ

$= 15000$ ಮೀ./ಗಂಟೆ



ಚಿತ್ರ 8.52

ಕೊಳವೆಯ ವ್ಯಾಸ, $2r = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = \frac{7}{100}$ ಮೀ.

h ಎಂಬುದು ಏರಿಕೆಯಾಗಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವಾಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 21$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= \frac{21}{100}$ ಮೀ.

ಈಗ, ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = ಕೊಳವೆಯ ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ಗಂಟೆ × ವೇಗ

$$= \pi r^2 \times 1 \times 15000$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000 \text{ ಘ.ಮೀ.}$$

ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬೇಕಾಗಿರುವ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣದ ಘನಫಲವು,

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ಅಗತ್ಯವಾದ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು T ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

$\therefore$ T ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣ

$$\Longrightarrow \quad \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $T = 2$ ಗಂಟೆಗಳು.

ಇದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಏರಿಸಲು 2 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.27

55 ಸೆಂ.ಮೀ.×40 ಸೆಂ.ಮೀ.×15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯಿರುವ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಚಪ್ಪಡಿಯನ್ನು ಕರಗಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಕೊಳವೆಯಂತೆ ಹೊಸ ರೂಪ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಕೊಳವೆಯ ಹೊರ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಮಂದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ h_1 ಎಂಬುದು ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವಾಗಿರಲಿ.

R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೊಳವೆಯ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಕಬ್ಬಿಣದ ಚಪ್ಪಡಿ: $lbh = 55 \times 40 \times 15$.

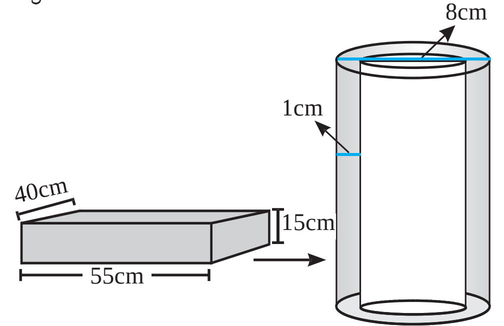
ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆ:

ಹೊರ ವ್ಯಾಸ, $2R = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ, $R = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಮಂದ, $w = 1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = R - w = 4 - 1 = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.53

ಈಗ, ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲ = ಕಬ್ಬಿಣದ ಚಪ್ಪಡಿಯ ಘನಫಲ

$$\Longrightarrow \quad \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

ಅಂದರೆ, $\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದ, $h_1 = 1500$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= 15$ ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. ಒಂದು ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯು ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಳವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 3.6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಘನವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಘನದ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 21 ಸೆಂ.ಮೀ., 25.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಮಾತ್ರೆಯು ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರುವುದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಮಾತ್ರೆಯ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 14 ಮಿ.ಮೀ. ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 5 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಡೇರೆಯು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಇದರ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 13.5 ಮೀ. ಮತ್ತು 28 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 3 ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಜೇಡಿಮಣ್ಣನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಎತ್ತರವು 48 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು. ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅದನ್ನು ಗೋಳಾಕಾರವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದನು. ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಏಕರೂಪ ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತದ ಉದ್ದವಾದ ತಂತಿಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1.2 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಆಂತರಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಪಾತ್ರೆಗೆ ನೀರನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಆಂಶಿಕವಾಗಿ ನೀರು ತುಂಬಿರುವ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಲಾಯಿತು. ಗೋಳವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು ಏರಿಕೆಯಾಯಿತು?
9. 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ 5 ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡಿನ ದರದಲ್ಲಿ ನೀರು ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಧ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ಹೊರ ಚೆಲ್ಲುವ ನೀರಿನ(ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. 4 ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 10 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರನ್ನು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ 2.5 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ದರದಲ್ಲಿ ಬಿಡುಗಡೆಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ನೀರನ್ನು ಖಾಲಿಗೊಳಿಸಲು ತಗಲುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು? ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನೀರು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.
11. 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಘನ ವಸ್ತುವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರದ ಮೂರು ಘನ ಗೋಳಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದ 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಆಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಹೊಸ ಘನದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ

ಪ್ರತಿಯೊಂದು 4 ಮಿ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗೋಳಾಕಾರದ ಸತುವಿನ ಗುಂಡುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಸತುವಿನ ಗುಂಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

14. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಐಸ್ ಕ್ರೀಂ ತುಂಬಿದೆ. ಐಸ್ ಕ್ರೀಮನ್ನು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಶಂಕುಗಳಿಗೆ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರದಂತೆ ತುಂಬಬೇಕಿದೆ. ಲಭ್ಯವಾದ ಐಸ್ ಕ್ರೀಮನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ ಶಂಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. 4.4 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2 ಮೀ. ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಪಾದವಿರುವ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ಮಳೆ ನೀರನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಪಾತ್ರೆಗೆ ನೀರನ್ನು ವರ್ಗಾಯಿಸಿದರೆ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವೇನು?

16. 32 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಬಕೆಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಬಕೆಟ್ಟಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಳನ್ನು ನೆಲಕ್ಕೆ ಸುರಿದಾಗ ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರವಾಗುತ್ತದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ರಾಶಿಯ ಎತ್ತರವು 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ರಾಶಿಯ ಓರೆ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. 20 ಮೀ. ಆಳ ಮತ್ತು 14 ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಲಾಗಿದೆ. ತೋಡಿದ ಮಣ್ಣನ್ನು 20ಮೀ. $\times$ 14ಮೀ. ಅಳತೆಯ ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಜಗಲಿಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಜಗಲಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

ಸೂಕ್ತವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 2π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 3π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 2 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

2. ಎತ್ತರ h ನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) $\frac{3}{2}\pi h$ ಚ.ಮಾ. (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ ಚ.ಮಾ. (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ ಚ.ಮಾ. (D) $\frac{2}{3}\pi h$ ಚ.ಮಾ.

3. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 80 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಘನಫಲವು

   (A) 400 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 16 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 200 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) $\frac{400}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

4. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 200π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೊತ್ತವು

   (A) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 25 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 30 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 15 ಸೆಂ.ಮೀ.

5. ತ್ರಿಜ್ಯ a ಮೂಲಮಾನ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ b ಮೂಲಮಾನವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

   (A) $\pi a^2 b$ ಚ.ಮಾ. (B) $2\pi ab$ ಚ.ಮಾ. (C) 2π ಚ.ಮಾ. (D) 2 ಚ.ಮಾ.

6. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿವೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು 120 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು

   (A) 1200 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 360 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 40 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 90 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

7. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಓರೆ ಎತ್ತರವು

(A) 10 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 30 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 96 ಸೆಂ.ಮೀ.

8. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 120π ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 1200π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 600π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 300π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 600 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

9. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 48π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು

(A) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 8 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 10 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 12 ಸೆಂ.ಮೀ.

10. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 48 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು

(A) 240 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 120 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 80 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 480 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

11. ಎರಡು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1:2 ಮತ್ತು 2:1 ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

12. ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 8π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 16 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 16π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

13. 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 12 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 4π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 3π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

14. ಒಂದು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $\frac{9}{16}\pi$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು

(A) $\frac{4}{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ. (B) $\frac{3}{4}$ ಸೆಂ.ಮೀ. (C) $\frac{3}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ. (D) $\frac{2}{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

15. ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು 9:25 ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125

16. ತ್ರಿಜ್ಯವು a ಮೂಲಮಾನ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) $2\pi a^2$ ಚ.ಮಾ. (B) $3\pi a^2$ ಚ.ಮಾ. (C) $3\pi a$ ಚ.ಮಾ. (D) $3a^2$ ಚ.ಮಾ.

17. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 100π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು

(A) 25 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 100 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 10 ಸೆಂ.ಮೀ.

18. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 36π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವು

(A) 12π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 36π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 72π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 108π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

19. ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 6π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 24π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 36π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 8π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

20. ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಇನ್ನೊಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

21. ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 24 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಈ ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧ ಗೋಳಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 12 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 8 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 16 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 18 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

22. ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುಗಳು ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇವುಗಳ ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 4:3 ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು

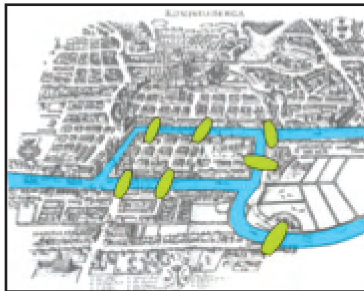
(A) 16 : 9 (B) 8 : 6 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

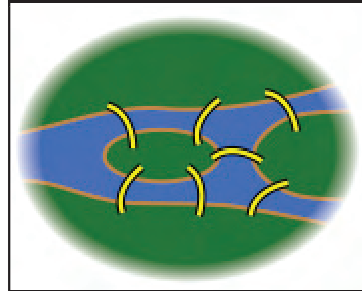
ಕೋನಿಗ್ಸ್‌ಬರ್ಗ್‌ನ ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಐತಿಹಾಸಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರಷಿಯಾದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಿಗ್ಸ್‌ಬರ್ಗ್ ಪಟ್ಟಣವು (ಈಗ ಕಲಿನಿಂಗ್ರ್ಯಾಡ್, ರಷ್ಯಾ) ಪ್ರೆಗೆಲ್ ನದಿಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಯಲ್ಲಿದ್ದು, ಪರಸ್ಪರ ಸಂಪರ್ಕವಿರುವ ಮತ್ತು ಪ್ರಮುಖ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳಿಂದ ಸಂಪರ್ಕ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ದೊಡ್ಡ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ಸಮಸ್ಯೆಯು ಪಟ್ಟಣದ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಮಾತ್ರ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ. ಸೇತುವೆಗಳಿಂದಲ್ಲದೆ ಯಾವುದೇ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ತಲುಪಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹಾದುಹೋಗಲೇಬೇಕು (ಸೇತುವೆಯ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿ ನಂತರ ಹಿಂದೆ ಬಂದು ಉಳಿದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಚಲಿಸುವಂತಿಲ್ಲ).

ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್(ಯೂಲರ್)ರವರು 1735 ರಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. ಆಯ್ಲರ್‌ರವರಿಂದಾದ ಇದರ ಋಣಾತ್ಮಕ ಕ್ರಾಂತಿಯು ನಕ್ಷಾ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ (graph theory) ನಾಂದಿಯಾಯಿತು ಮತ್ತು ಟೊಪಾಲಜಿ (Topology) ಯ ಕಲ್ಪನೆಗೆ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೀಡಿತು.







ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಕ್ರ. ಸಂ	ಹೆಸರು	ಆಕೃತಿ	ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಥವಾ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ(ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)	ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ(ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)	ಘನಫಲ (ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)
1	**ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ**		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2	**ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ**		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	$\pi R^2 h - \pi r^2 h$ $\pi h(R^2 - r^2)$ $\pi h(R+r)(R-r)$
3	**ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು**		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4	**ಛಿನ್ನಕ (ಫ್ರಸ್ಟಮ್)**		- - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -	$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$
5	**ಗೋಳ**		$4\pi r^2$	- - -	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6	**ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳ**		- - -	- - -	$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$
7	**ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳ**		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8	**ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳ**		$2\pi(R^2 + r^2)$	$2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$ $= \pi(3R^2 + r^2)$	$\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$
9	**ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ.** $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ ಶಂಕುವಿನ CSA = ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi rl = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಉದ್ದ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ			10. ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ಹರಿದು ಹೋಗುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = { ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ವೇಗ × ಕಾಲ } 11. ಪುನರ್ ರೂಪಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಹೊಸ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{\text{ಕರಗಿಸಿದ ಘನದ ಘನಫಲ}}{\text{ರೂಪಿಸಿದ ಒಂದು ಘನದ ಘನಫಲ}}$	
12	ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು: 1 ಮೀ.^{3} =1000 ಲೀಟರ್‌ಗಳು, 1 ಡೆಸಿ.ಮೀ.^{3} = 1ಲೀ., 1000 ಸೆಂ.ಮೀ.^{3} = 1 ಲೀ., 1000 ಲೀ. = 1 ಕಿಲೋ ಲೀ..				

9

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

Give me a place to stand, and I shall move the earth
-Archimedes

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು
- ತ್ರಿಭುಜಗಳು
- ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು



ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ

(ಕ್ರಿ.ಶ. 598-668) ಭಾರತ

(ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ವಿಜ್ಞಾನಿ)

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರವರು "ಬ್ರಹ್ಮಸ್ಫುಟ ಸಿದ್ಧಾಂತ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸೂತ್ರವು ಅವರ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳಾದ p, q, r ಮತ್ತು s ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಅಂದಾಜು ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅವರು ಕೊಟ್ಟರು.

ಅಂದಾಜು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $2t = p+q+r+s$.

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

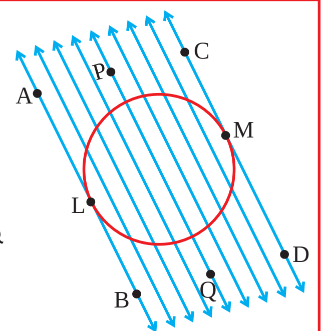
ಕ್ರಿ.ಪೂ.3000 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮೊದಲೇ ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಉಗಮವಾಗಿದ್ದ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆರಂಭದ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಉದ್ದಗಳು, ಕೋನಗಳು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅನುಭವಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದುದರ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕ್ಷೆ, ನಿರ್ಮಾಣ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಹಲವಾರು ಇನ್ನಿತರ ಕರಕುಶಲಗಳಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ಇದನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲಾಯಿತು.

ಬೀಜಗಣಿತ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮುಂತಾದ ಸಹ ವಿಭಾಗಗಳಿಗಿಂತ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಸುಧಾರಣೆಗಾಗಿ ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಹಲವಾರು ಹೊಸ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಿವೆ. ಆದರೆ ಹಲವಾರು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ಸುಧಾರಣೆಯನ್ನು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಖಂಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ರೇಖಾಗಣಿತವು ಗಣಿತದ ಇತರೆ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿನ ಹಲವಾರು ಗಣಿತೀಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಜವಾದ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು, ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ.

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಜ್ಯಾ, ರೇಖಾಖಂಡ, ವೃತ್ತಖಂಡ, ಮುಂತಾದ ಹಲವಾರು ಪದಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಂತಹ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

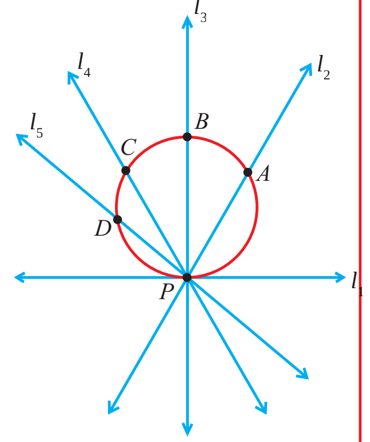
ಒಂದು ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PQ ಎಂಬ ಛೇದಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ PQ ನ ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಛೇದಕಗಳನ್ನು PQ ಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲಿಯು ಛೇದಕಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳು



ತುಂಬಾ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಡೆಯ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. PQ ಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಛೇದಕಗಳಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ವೃತ್ತದ L ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಈ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ L ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ **ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. AB ಯು CD ಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ನಾವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು, ಆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಲವಾರು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. l_2, l_3, l_4 ಮತ್ತು l_5 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, l_2, l_3, l_4, l_5 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಛೇದಕಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ l_1 ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. l_1 ರೇಖೆಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ **ಸ್ಪರ್ಶಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



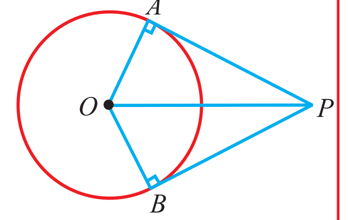
ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಆ ಬಿಂದುವನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

AP ಎಂಬುದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ.

ಲಂಬಕೋನ ΔOPA ನಲ್ಲಿ, $OA \perp AP$

$OP^2 = OA^2 + AP^2$ [ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ]

$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}$.



9.2 ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of tangents to a circle)

ಈಗ ನಾವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ

(i) ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು,

(ii) ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು,

ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

9.2.1 ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು)

ಫಲಿತಾಂಶ

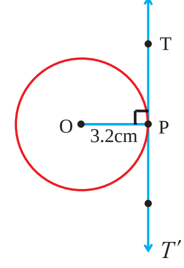
ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.1

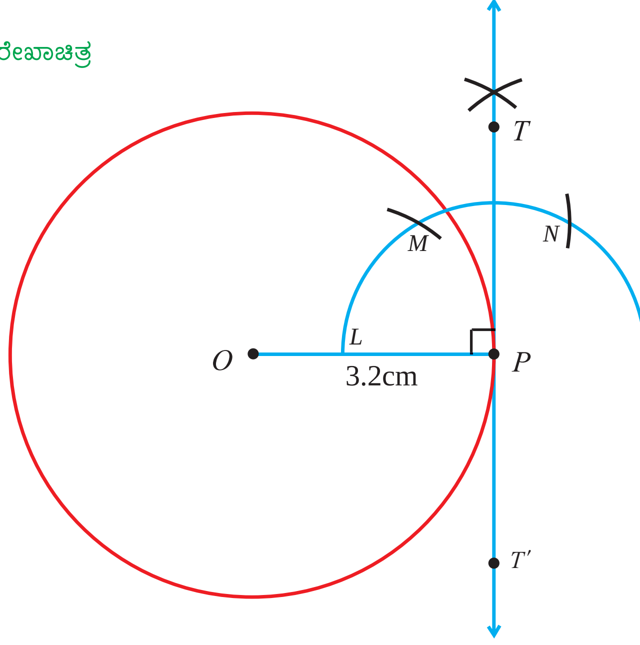
3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು P ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು)

ದತ್ತ : ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iii) P ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, OP ಯನ್ನು L ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) $\overparen{LM} = \overparen{MN}$ ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಸದ ಮೇಲೆ M ಮತ್ತು N ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(v) $\angle MPN$ ಗೆ PT ಎಂಬ ಅರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ಅಗತ್ಯವಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕ $T'PT$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು, TP ಯನ್ನು T' ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

ಗಮನಿಸಿ

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ OP ಸರಳರೇಖೆಗೆ PT ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. PT ಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

9.2.2 ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of a tangent to a circle using the tangent-chord theorem)

ಫಲಿತಾಂಶ ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ

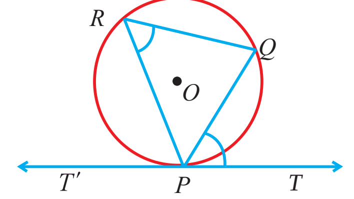
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಆ ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಜ್ಯಾವು ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.2

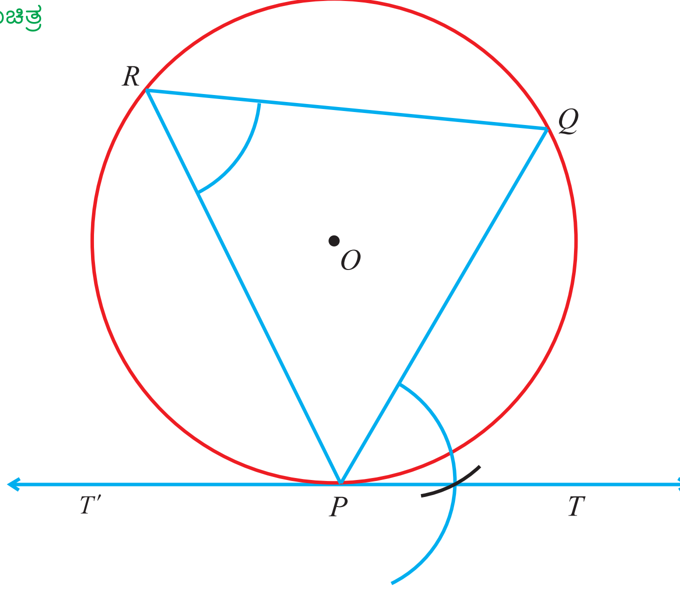
3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ : ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(iii) P ನ ಮೂಲಕ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾ PQ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) P, Q ಮತ್ತು R ಗಳು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ R ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(v) PR ಮತ್ತು QR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(vi) P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle QPT = \angle PRQ$ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(vii) ಅಗತ್ಯವಾದ $T'PT$ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, TP ಯನ್ನು T' ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

9.2.3 ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of pair of tangents to a circle from an external point)

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

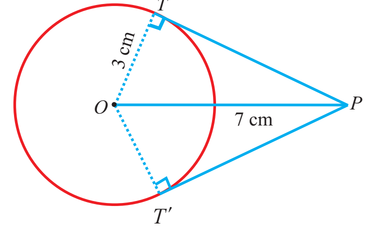
(ii) ವ್ಯಾಸಗಳು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ 90° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.3

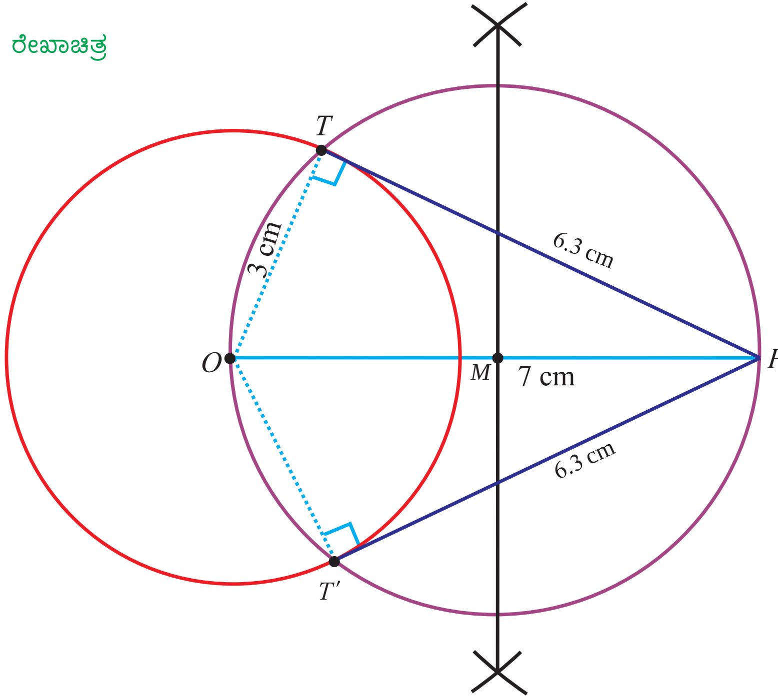
3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ: ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) O ನಿಂದ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iii) OP ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು OP ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತಿರಲಿ.

(iv) M ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು MO ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(v) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು T ಮತ್ತು T' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತಿರಲಿ.

(vi) PT ಮತ್ತು PT' ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇವು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ, $PT = 6.3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಪರಿಶೀಲನೆ

ಲಂಬಕೋನ ΔOPT ರಲ್ಲಿ, $PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$

$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}$ $\therefore$ $PT = 6.3$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ಅಂದಾಜು).

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

2. 4.8 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

3. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PA ಮತ್ತು PB ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಅವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

4. 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

5. 3ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ 9ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

9.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆ (Construction of triangles)

ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

(i) ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ

(ii) ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ

ಮೊದಲು, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

θ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $\overline{BC}$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

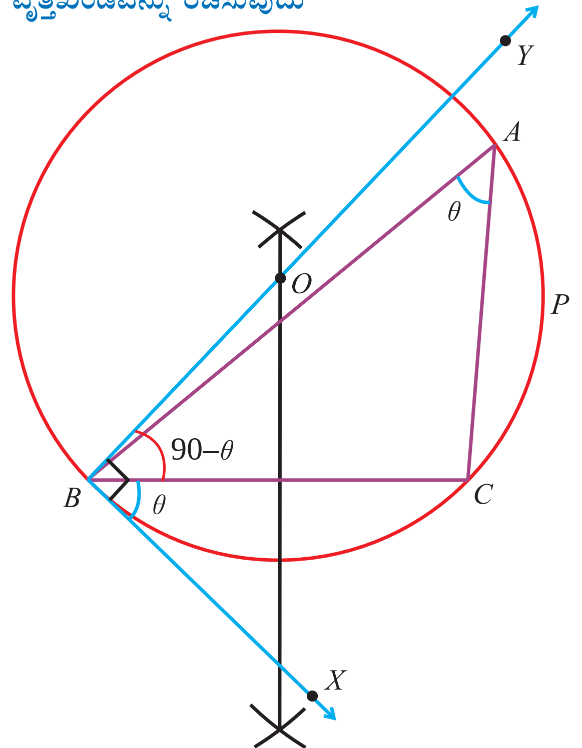
(ii) B ನಲ್ಲಿ, $\angle CBX = \theta$ ರಚಿಸಿರಿ.

(iii) $BY \perp BX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) BC ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OB ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು A ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, BAC ಅಧಿಕ ಕಂಸವು θ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಗತ್ಯವಾದ ವೃತ್ತಖಂಡವಾಗಿದೆ.



ಪಾದ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಪಾದ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಹಲವಾರು ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) A ನಲ್ಲಿ, $\angle BAX = \theta$ ಎಂಬ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

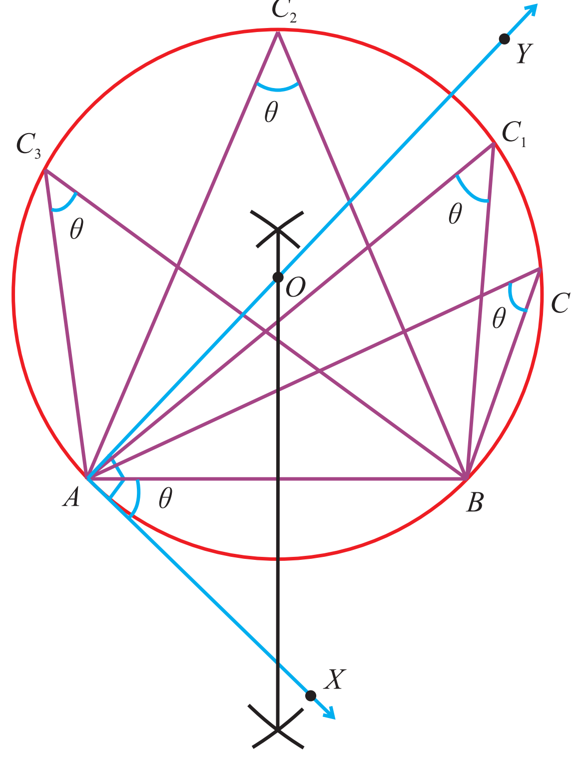
(iii) $AY \perp AX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) AB ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು AY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಹಾಗೂ AC ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(vii) $\triangle ABC$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.



ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಾದ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $\triangle ABC$ ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

$AX \perp AY$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle XAY = 90^\circ$.

ಹಾಗೂ, $OB = OA$. (ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

AX ಎಂಬುದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು C ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle BAX = \angle ACB$. (ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ).

ಗಮನಿಸಿ

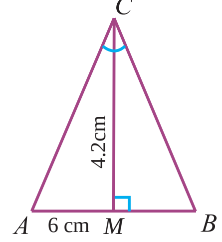
$C_1, C_2, C_3, \ldots$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ΔABC_1, ΔABC_2, ΔABC_3, $\cdots$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

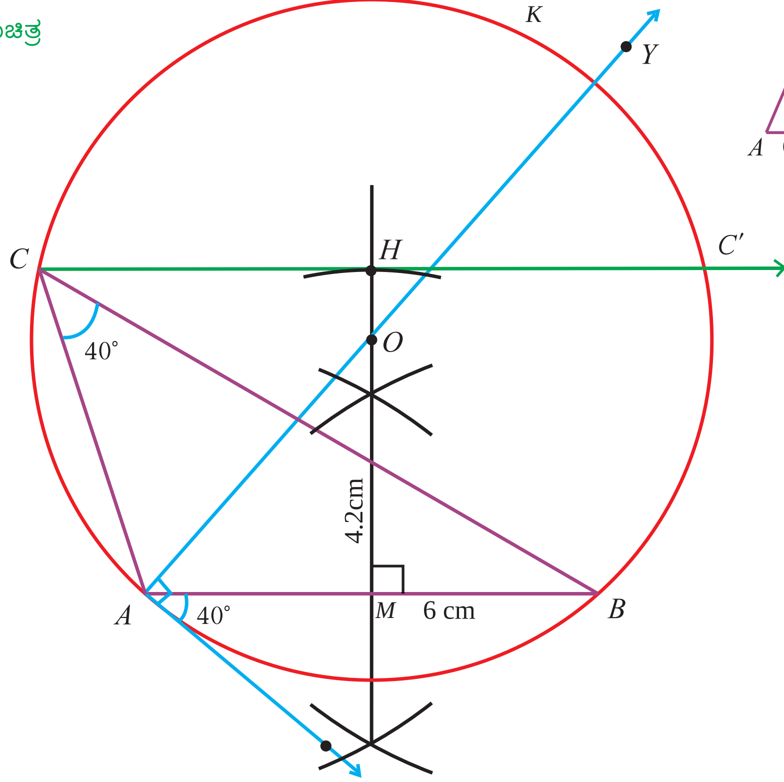
9.3.1 ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9.4

$AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle C = 40^{\circ}$ ಮತ್ತು C ಯಿಂದ AB ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle C = 40^{\circ}$,
C ಯಿಂದ AB ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.





ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $\angle BAX = 40^{\circ}$ ಆಗಿರುವಂತೆ AX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) $AY \perp AX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು AY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AB ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) AKB ವೃತ್ತಖಂಡವು 40° ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) MO ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲೆ $MH = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ H ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(viii) CHC' ನ್ನು AB ಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿ ವೃತ್ತವನ್ನು C ಮತ್ತು C' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

(ix) ΔABC ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ. ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$\Delta ABC'$ ಕೂಡ ಅಗತ್ಯವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

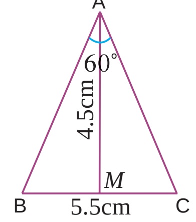
9.3.2 ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9.5

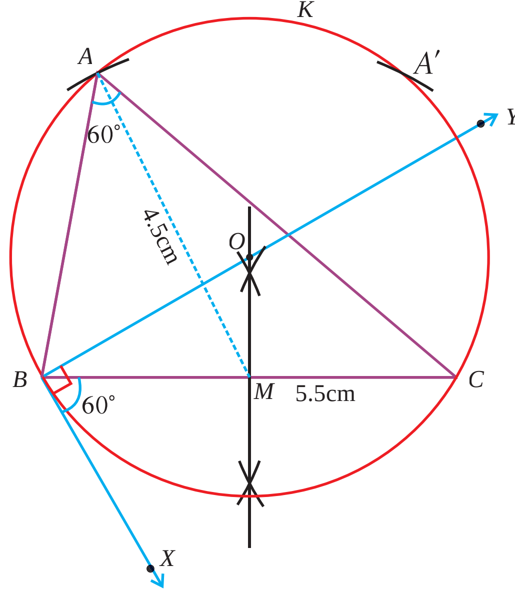
$BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 60^\circ$ ಮತ್ತು A ಶೃಂಗದಿಂದಿರುವ AM ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 60^\circ$, ಮಧ್ಯರೇಖೆ $AM = 4.5$ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $\angle CBX = 60^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ನ ಮೂಲಕ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) $BY \perp BX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BC ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OB ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಅಧಿಕ ಕಂಸ BKC ಯು 60° ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) M ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಮತ್ತು A' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

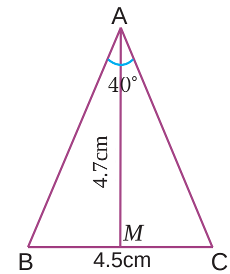
(viii) $\triangle ABC$ ಅಥವಾ $\Delta A'BC$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.6

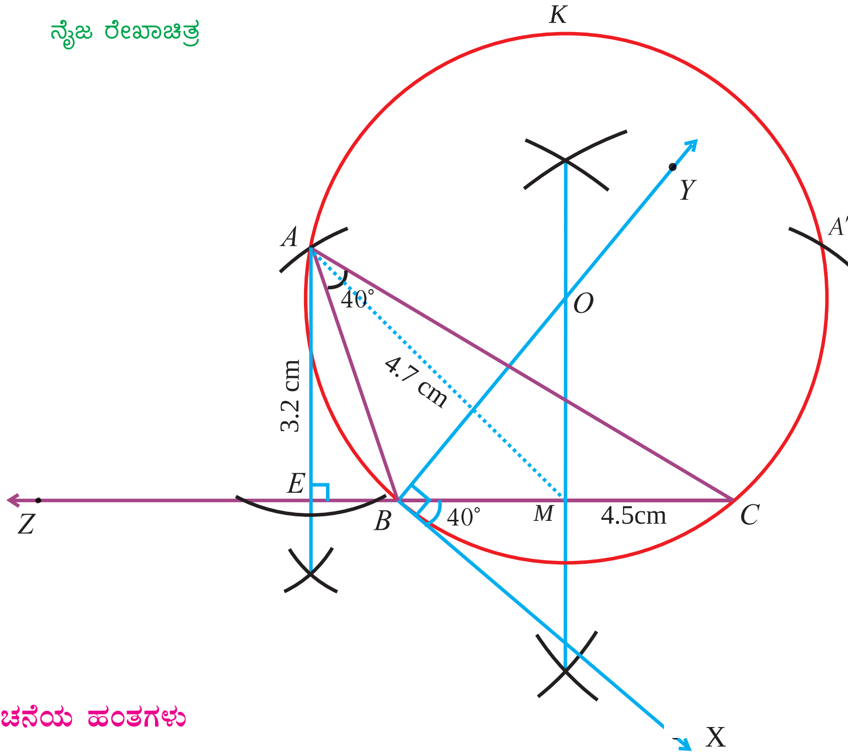
$BC = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 40^\circ$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ AM ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $BC = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 40^\circ$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ AM ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $BC = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $\angle CBX = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) $BY \perp BX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BC ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OB ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಅಧಿಕ ಕಂಸ BKC ಯು 40° ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) M ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 4.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಮತ್ತು A' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

(viii) ΔABC ಅಥವಾ $\Delta A'BC$ ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ. ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

(ix) CB ಯನ್ನು CZ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

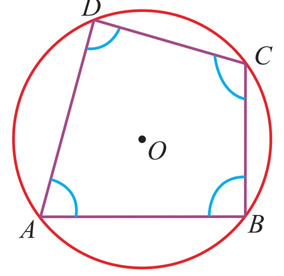
(x) $AE \perp CZ$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(xi) AE ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವು 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

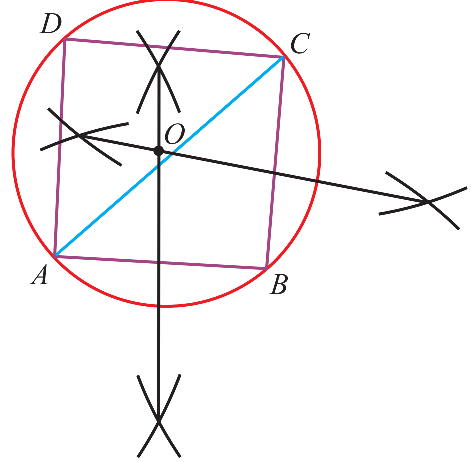
1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ AB=5.2ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ 48° ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
2. ಪಾದ PQ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle R = 60^\circ$ ಮತ್ತು R ನಿಂದ PQ ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔPQR ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
3. PQ = 4 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle R = 60^\circ$ ಮತ್ತು R ನಿಂದ PQ ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯವು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔPQR ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
4. BC = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 45^\circ$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
5. ಪಾದ BC = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle BAC = 40^\circ$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಹಾಗೂ, A ನಿಂದಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

9.4 ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆ (Construction of cyclic quadrilateral)



ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಾಲ್ಕು ಅಳತೆಗಳು (ಐದು ಅಳತೆಗಳ ಬದಲಾಗಿ) ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ.

ಅಗತ್ಯವಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.



(i) ಕರಡು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\triangle ABC$ ಅಥವಾ $\triangle ABD$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) AB ಮತ್ತು BC ಗಳಿಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ($\triangle ABC$ ಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು)

(iii) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು, $\triangle ABC$ ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗ D ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ AD ಮತ್ತು CD ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(v) ಈಗ, $ABCD$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳ ವಿಭಿನ್ನ ಗಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ.

(i) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣ (ii) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು (iii) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ (iv) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳು (v) ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು (vi) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು, ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮನಾಂತರ ರೇಖೆ.

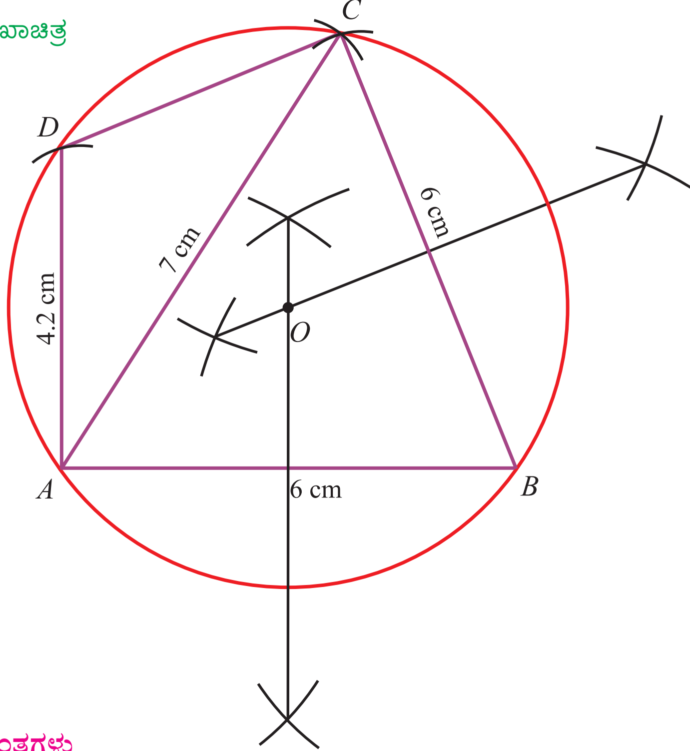
ವಿಧ I (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Three sides and one diagonal of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.7

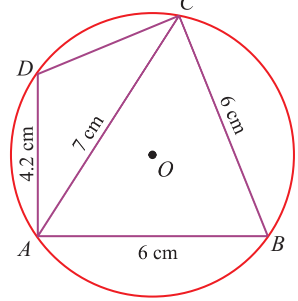
$AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AD = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AD = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
$AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಂಸಗಳನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. AC ಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iii) AB ಮತ್ತು BC ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(iv) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA $(= OB = OC)$ ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ΔABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(v) A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) AD ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.
ಈಗ, $ABCD$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

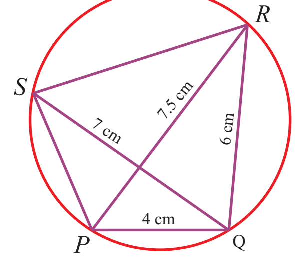
ವಿಧ II (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Two sides and two diagonals of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.8

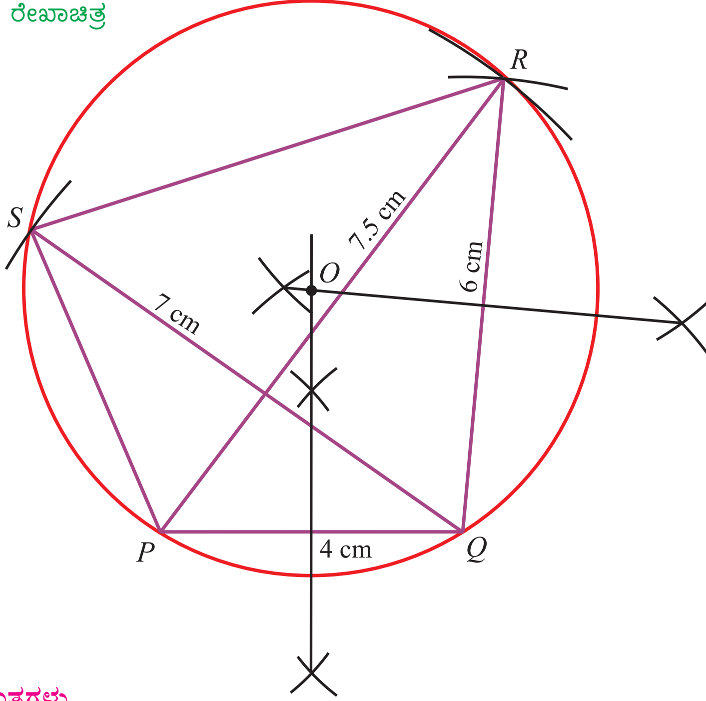
PQ = 4 ಸೆಂ.ಮೀ., *QR* = 6ಸೆಂ.ಮೀ., *PR* = 7.5ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು *QS* = 7ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ *PQRS* ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : *PQRS* ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, *PQ* = 4 ಸೆಂ.ಮೀ., *QR* = 6ಸೆಂ.ಮೀ., *PR* = 7.5ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು *QS* = 7ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. *PQ* = 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) *P* ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 7.5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) *Q* ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 6ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲಿನ ಕಂಸವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ *R* ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) *PR* ಮತ್ತು *QR* ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(v) *PQ* ಮತ್ತು *QR* ನ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ *O* ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(vi) *O* ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು *OP(=OQ=OR)* ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔPQR ನ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vii) *Q* ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು *S* ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(viii) *PS* ಮತ್ತು *RS* ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಈಗ, *PQRS* ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

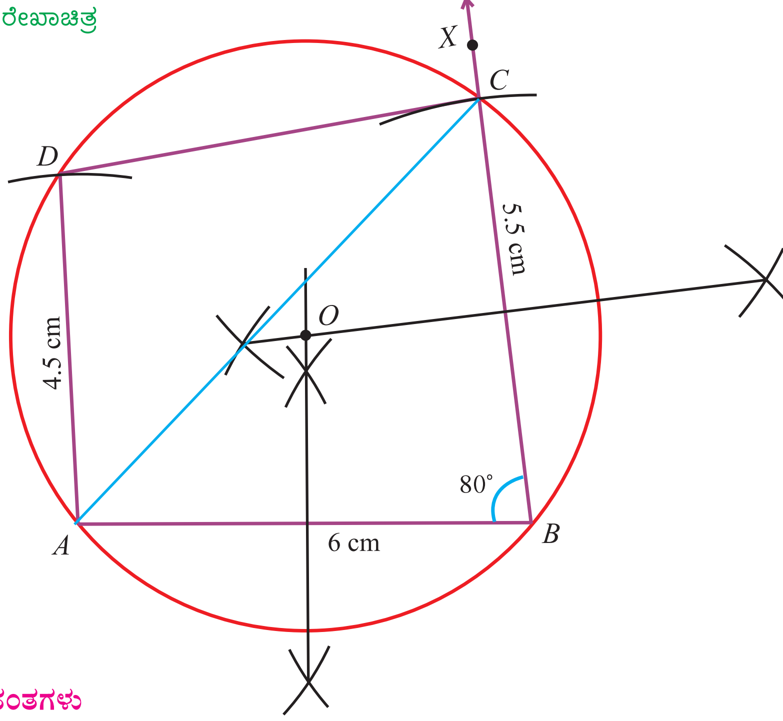
ವಿಧ III (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Three sides and one angle of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.9

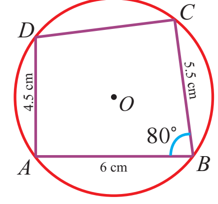
$AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 80^\circ$ ಮತ್ತು $AD = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ: $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 80^\circ$ ಮತ್ತು $AD = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) B ಮೂಲಕವಾಗಿ $\angle ABX = 80^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) B ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ BX ನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iv) AB ಮತ್ತು BC ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OA\ (= OB = OC)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 4.5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vii) AD ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

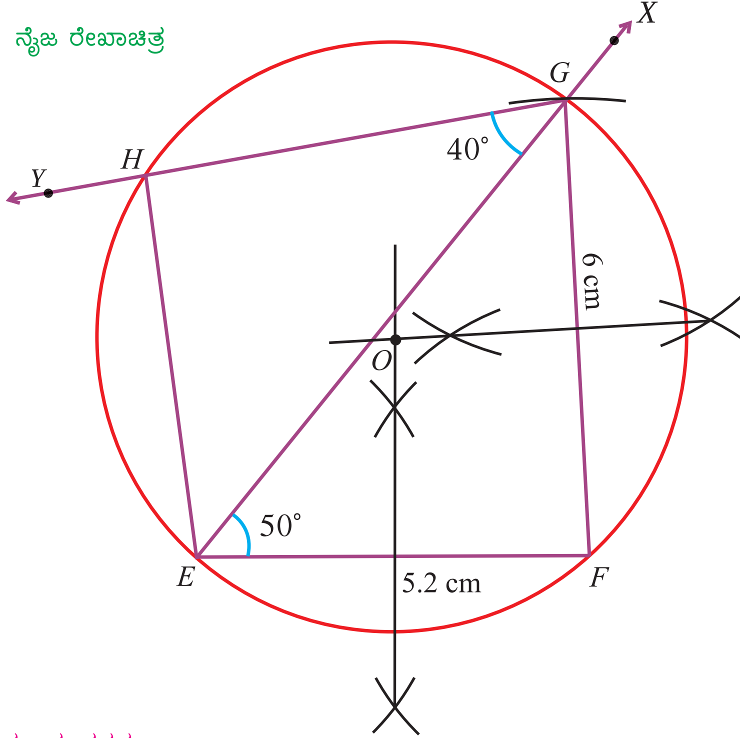
ಈಗ, $ABCD$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

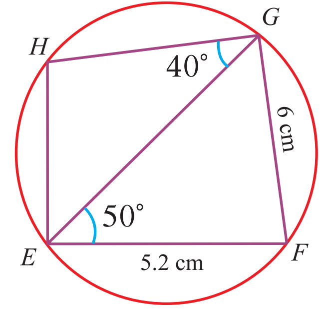
ವಿಧ IV (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Two sides and two angles of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.10

$EF = 5.2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle EGH = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ $EFGH$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ: $EFGH$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $EF = 5.2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle EGH = 40^\circ$.





ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. $EF = 5.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) E ನಿಂದ, $\angle FEX = 50^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ EX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) F ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ EX ನ್ನು G ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) FG ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(v) EF ಮತ್ತು FG ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(vi) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OE\ (= OF = OG)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vii) G ನಿಂದ, $\angle EGY = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ GY ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು H ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(viii) EH ನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $EFGH$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

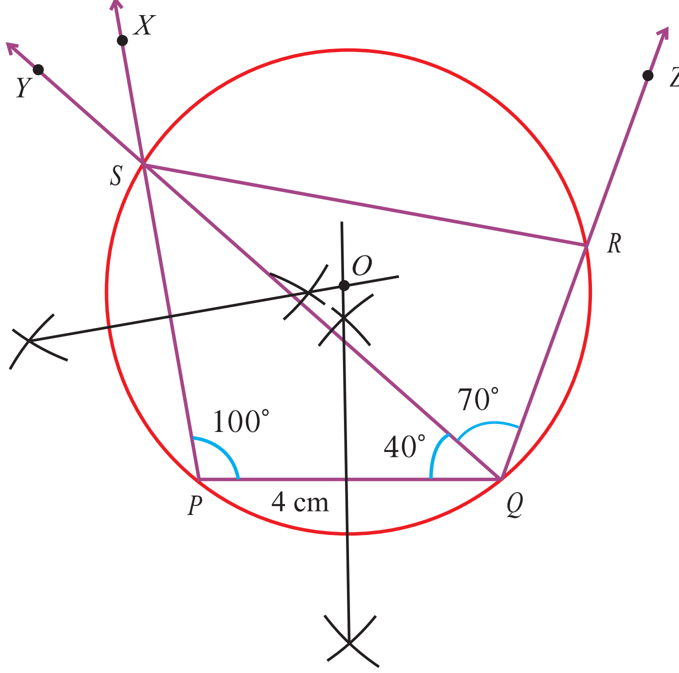
ವಿಧ V (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(One side and three angles of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.11

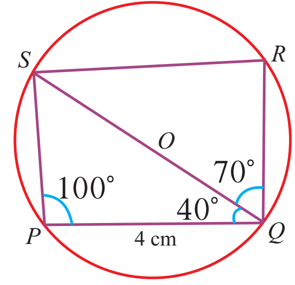
$PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle SQR = 70^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ: $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle SQR = 70^\circ$.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
$PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) P ನಿಂದ $\angle QPX = 100^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ PXನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) Q ನಿಂದ $\angle PQY = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ QY ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. QY ಎಂಬುದು PX ನ್ನು S ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತಿರಲಿ.

(iv) PQ ಮತ್ತು PS ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OP(= OQ = OS)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ $\triangle PQS$ ನ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) Q ನಿಂದ $\angle SQZ = 70^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ QZ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(vii) RS ನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.
ಈಗ, $PQRS$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

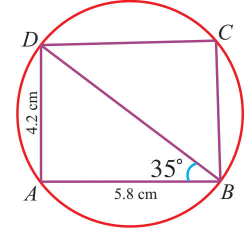
ವಿಧ VI (ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು, ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Two sides , one angle and one parallel line are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.12

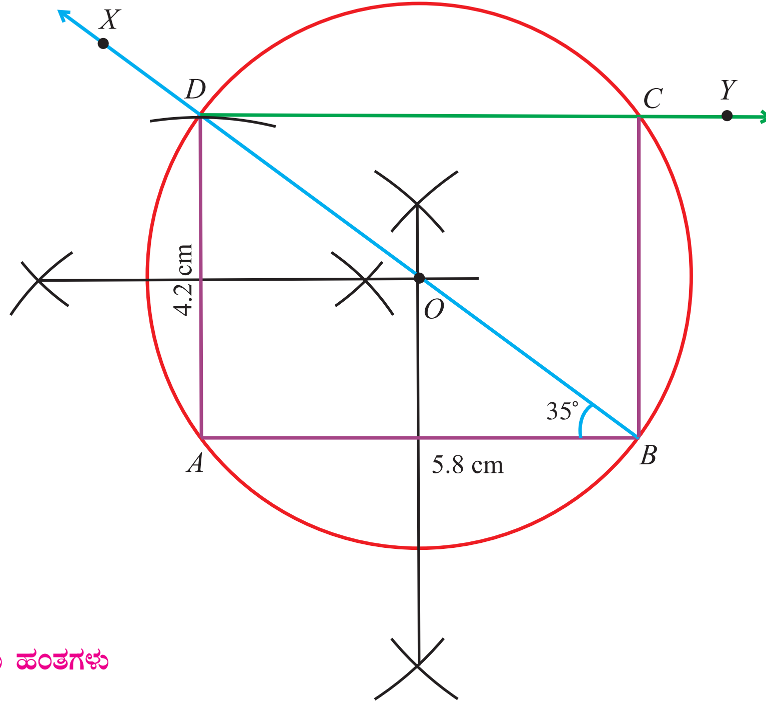
$AB = 5.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel CD$ ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $AB = 5.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel CD$.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
$AB = 5.8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) B ನಿಂದ, $\angle ABX = 35^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ BX ನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) AB ಮತ್ತು AD ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OA\ (= OB = OD)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔABD ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) DY ನ್ನು $DY \parallel AB$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(vii) BC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $ABCD$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. $PQ = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PR = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $PS = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

2. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AD = 4.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BD = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

3. $PQ = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle QPR = 45^\circ$ ಮತ್ತು $PS = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

4. $AB = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 80^\circ$, $AD = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

5. $KL = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $KM = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $LM = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ., ಮತ್ತು $LN = 5.3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $KLMN$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

6. $EF = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $EH = 4.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $FH = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., ಮತ್ತು $EG = 6.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ $EFGH$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

7. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 70^\circ$, $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle ACD = 30^\circ$ ಆಗಿರುವ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

8. $PQ = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle QPR = 35^\circ$ ಮತ್ತು $\angle PRS = 70^\circ$ ಆಗಿರುವ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

9. $AB = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ACD = 30^\circ$ ಆಗಿರುವ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

10. $AB = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 110^\circ$, $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel CD$ ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

1901 ರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಶರೀರ ವಿಜ್ಞಾನ ಅಥವಾ ಔಷಧಿ, ಸಾಹಿತ್ಯ ಮತ್ತು ಶಾಂತಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗೈದ ಸಾಧಕರಿಗೆ ಪ್ರತಿಷ್ಠಿತ ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಗೌರವಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪುರಸ್ಕಾರವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಸ್ವೀಡನ್ನಿನ ಸ್ಟಾಕ್‌ಹಾಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ನೊಬೆಲ್ ಫೌಂಡೇಶನ್ ರವರು ನಿರ್ವಹಿಸಿಕೊಂಡು ಬರುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರತಿ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಸಭೆ ಸೇರುವ ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಒಕ್ಕೂಟ (IMU) ದ ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 40 ವರ್ಷಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರದ ಎರಡು, ಮೂರು ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಫೀಲ್ಡ್ಸ್ ಪದಕವೆಂಬ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಗೌರವಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಫೀಲ್ಡ್ಸ್ ಪದಕವನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

10

ನಕ್ಷೆಗಳು

- ಪೀಠಿಕೆ
- ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು
- ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು

I think, therefore I am

- Rene Descartes



ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆ

(1596-1650)

ಫ್ರಾನ್ಸ್

ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾಗಿರುವಾಗ ಕೊಠಡಿಯ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಝೇಂಕರಿಸುವ ಒಂದು ಕೀಟವನ್ನು ನೋಡಿ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲವನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿದರು.

ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುವ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಇವರು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದರು.

10.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನಕ್ಷೆಗಳು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಚಿತ್ರಗಳಾಗಿವೆ. ತೂಕವು ಎತ್ತರದೊಡನೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಹೇಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಕಠಿಣವಾಗಬಹುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿನ ಕಲಿಕೆಯು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಅರಿವಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಲು ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆರೆಯುತ್ತವೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಹವ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಳಿಸಬೇಕು. ಗಮನವಿಟ್ಟು ರಚಿಸಿದ ನಕ್ಷೆಯು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥೈಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವುದಲ್ಲದೇ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಕಾರ್ಯದ ನಿಖರತೆಯ ಮೇಲೆ ಮೌಲ್ಯಯುತವಾದ ಪರೀಕ್ಷೆಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ನಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಉತ್ತಮವಾದ ಅಂದಾಜಿಸುವಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆಯು ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದ ನಿಖರತೆಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯಾರೂ ಮರೆಯಬಾರದು.

10.2 ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು (Quadratic Graphs)

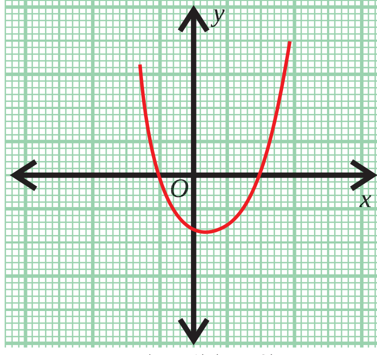
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A ಮತ್ತು B ಗಳು $\mathbb{R}$ ನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು, $f : A \to B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಎಲ್ಲಾ (x, y) ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳ $\{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\}$ ಗಣವನ್ನು f ನ ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

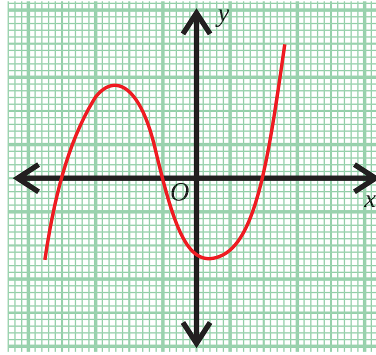
x ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ನಕ್ಷೆಯು a ಪ್ರವಣತೆಯೊಂದಿಗೆ ಬಾಗಿದ ರೇಖೆ ಆಗಿದೆ.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ನಕ್ಷೆಯು ನಿರಂತರವಾದ ರೇಖೀಯವಲ್ಲದ ವಕ್ರ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಪರವಲಯ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

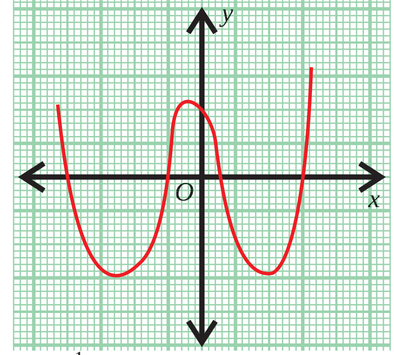
ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.



$y = (x+1)(x-2)$,
ಘಾತ 2 ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,
ಘಾತ 3 ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$
ಘಾತ 4 ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾವು $y = ax + b, a \neq 0$ ರೂಪದ ರೇಖೀಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು a, b ಮತ್ತು c ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು, $a \neq 0$ ಆಗಿರುವ $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸೋಣ ಮತ್ತು ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಯ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

$y = ax^2 + bx + c$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

ಇದರಿಂದ $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0$. (ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ವರ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.)

ವಕ್ರ(ಪರವಲಯ)ದ ಶೃಂಗವು $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ಆಗಿದೆ.

$a > 0$ ಆದರೆ, ವಕ್ರವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ; ಇದು $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು $x = -\frac{b}{2a}$ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$a < 0$ ಆದರೆ, ವಕ್ರವು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ; ಇದು $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು $x = -\frac{b}{2a}$ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ($y = ax^2 + bx + c$)	ಶೃಂಗ	a ನ ಚಿಹ್ನೆ	ವಕ್ರದ ಸ್ವರೂಪ
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ಧನಾತ್ಮಕ	(i) ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ. (ii) $y = 0$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (iii) $x=0$, ಅಂದರೆ y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ಋಣಾತ್ಮಕ	(i) ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ. (ii) $y = 0$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (iii) $x=0$, ಅಂದರೆ y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	ಧನಾತ್ಮಕ	(i) ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ. (ii) $y = -4$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (iii) $x = 1$ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.

$y = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಕ್ರಮಗಳು

(i) $y = ax^2 + bx + c$ ಬಳಸಿಕೊಂಡು x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) ಸೂಕ್ತವಾದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಿ.

x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಳಸಿದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಳಸಿದ ಅಳತೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬಾರದು. ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಳತೆಯು ದೊಡ್ಡ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಿರಬೇಕು. ನಕ್ಷೆಯು ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ, ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $y = ax^2 + bx + c$ ನ ನಕ್ಷೆಯು ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.1

$y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

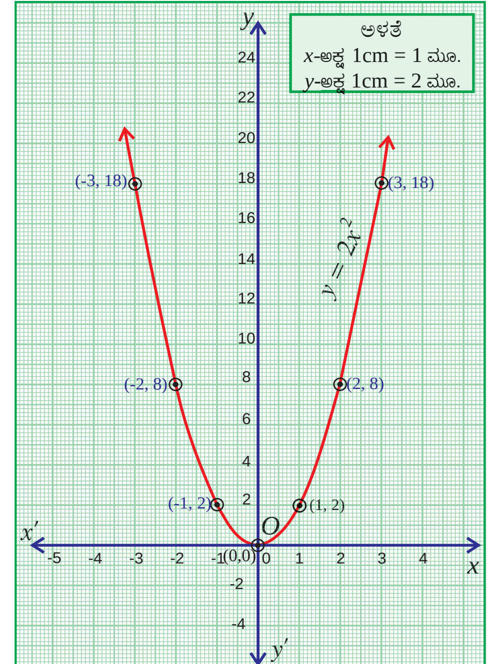
ಮೊದಲು x ಗೆ -3 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡೋಣ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

$(-3, 18), (-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.1

ಸೂಚನೆ

(i) ಇದು y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, y-ಅಕ್ಷದ ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ನಕ್ಷೆಯ ಭಾಗವು y-ಅಕ್ಷದ ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ನಕ್ಷೆಯ ಭಾಗದ ಕನ್ನಡಿಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿದೆ.

(ii) y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.2

$y = -3x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

x ಗೆ -3 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡೋಣ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

(–3, –27), (–2, –12), (–1, –3), (0, 0), (1,–3), (2, –12) ಮತ್ತು (3, –27) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

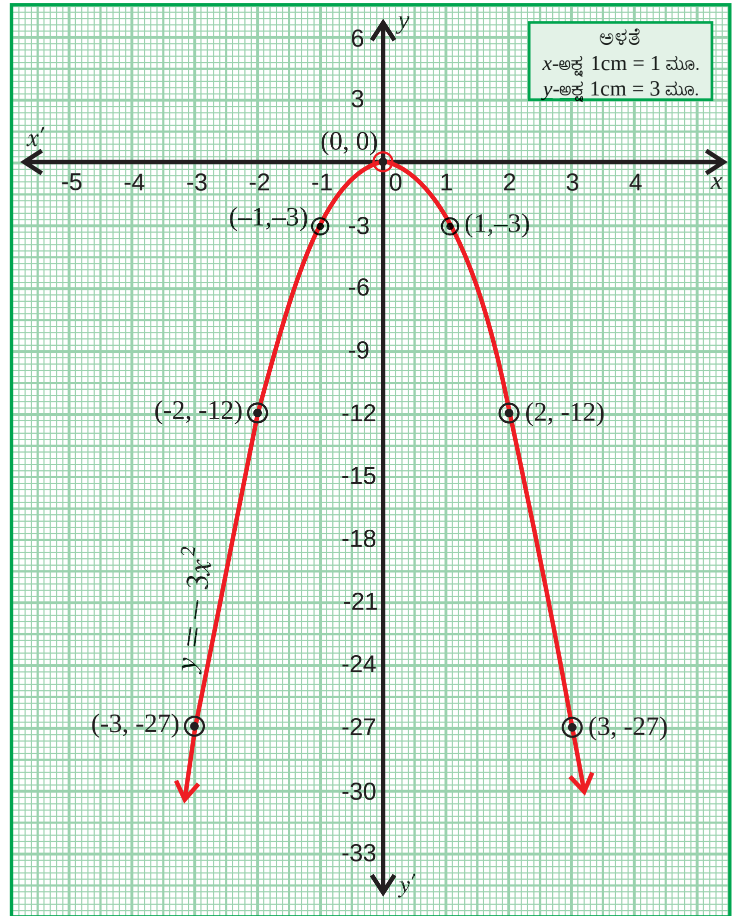
ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = -3x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) y ನ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವುದರಿಂದ, $y = -3x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ನಕ್ಷೆಯು y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.2

10.2.1 $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದು. (To solve the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ graphically.)

$ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $y = ax^2 + bx + c$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯೋಣ. x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ವಕ್ರವು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.3

$x^2 - 2x - 3 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$y = x^2 - 2x - 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.

x ಗೆ -3 ರಿಂದ 4 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ $y = x^2 - 2x - 3$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8
–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3
y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5

(–3, 12), (–2, 5), (–1, 0), (0, –3), (1, –4), (2, –3), (3, 0), (4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ವಕ್ರವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು (–1, 0) ಮತ್ತು (3, 0) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –1 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ.

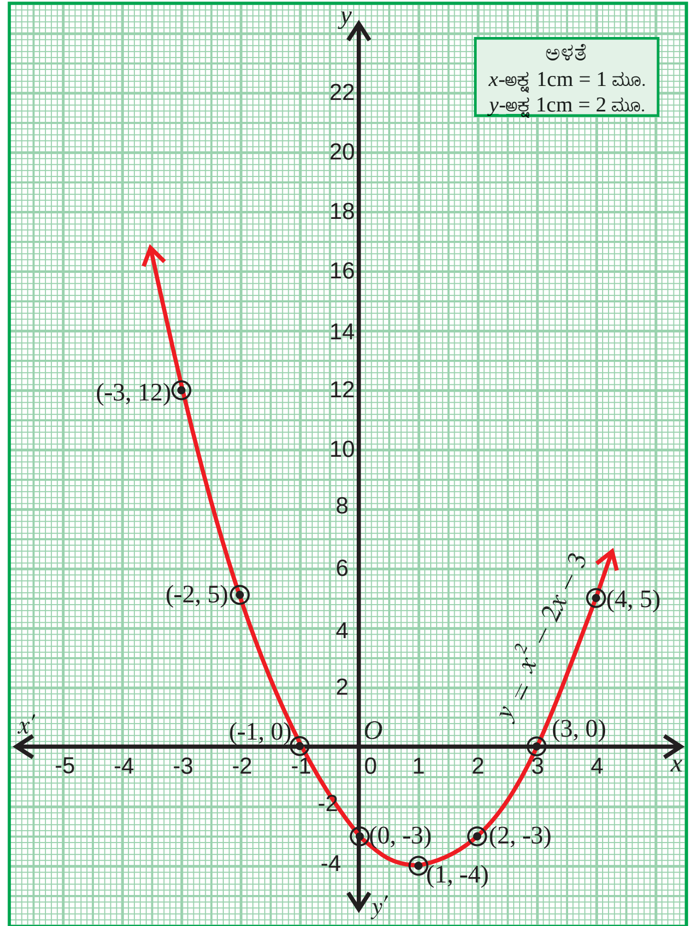
ಇದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು {–1, 3} ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಯಾವಾಗಲೂ $y = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕಗಳೆರಡೂ ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಕ್ರವು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

(iii) ವಕ್ರವು $x=1$ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ. (ಇದು y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿಲ್ಲ.)



ಚಿತ್ರ 10.3

ಉದಾಹರಣೆ 10.4

$2x^2 + x - 6 = 0$ ನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

x ಗೆ -3 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ $y = 2x^2 + x - 6$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
y	9	0	-5	-6	-3	4	15

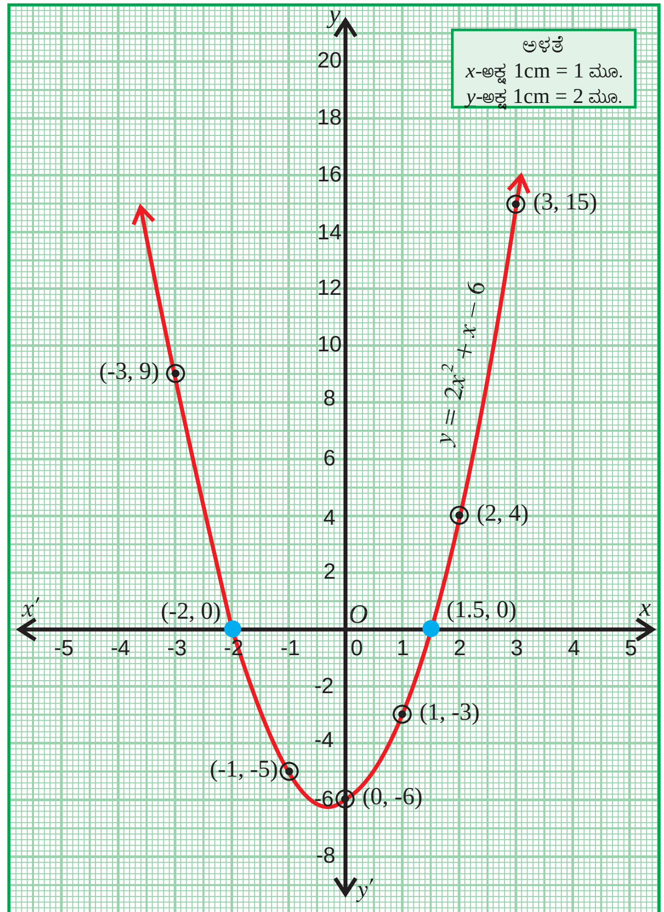
$(-3, 9)$, $(-2, 0)$, $(-1, -5)$, $(0, -6)$, $(1, -3)$, $(2, 4)$ ಮತ್ತು $(3, 15)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = 2x^2 + x - 6$ ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.

ವಕ್ರವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(-2\ ,\ 0)$ ಮತ್ತು $(1.5\ ,\ 0)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು -2 ಮತ್ತು 1.5 ಆಗಿವೆ.

ಇದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{-2\ ,\ 1.5\ \}$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.4

ಗಮನಿಸಿ

$y = 2x^2 + x - 6$ ನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

(i) $y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $y = 6 - x$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) ಎರಡು ನಕ್ಷೆಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $2x^2 + x - 6 = 0$ ರ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.5

$y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $2x^2 + x - 6 = 0$ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೊದಲು, $y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

(–3, 18), (–2, 8), (–1,2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$2x^2 + x - 6 = 0$ ಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $y = 2x^2$ ಮತ್ತು $2x^2 + x - 6 = 0$ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

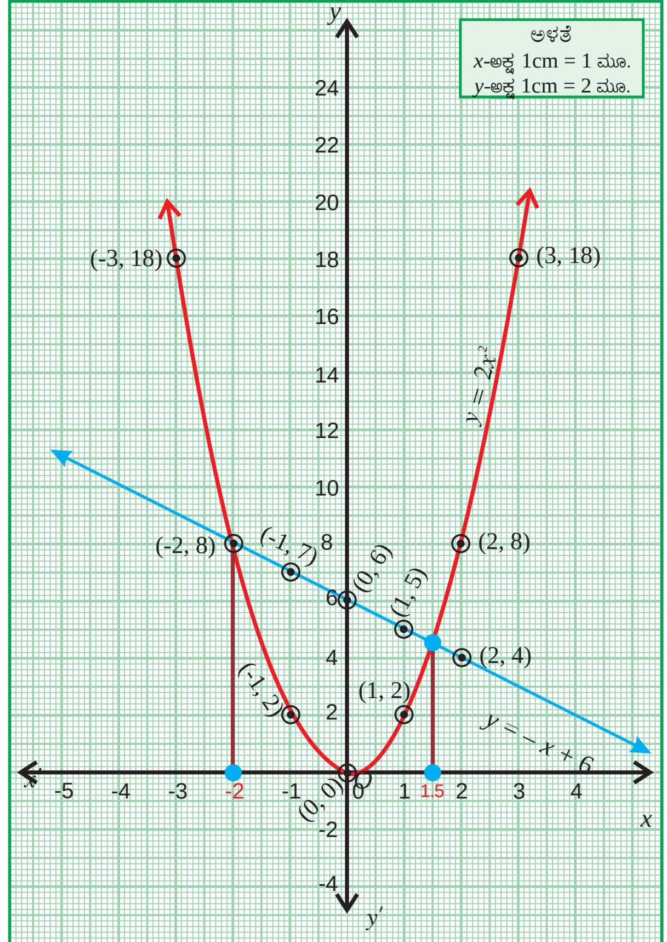
ಈಗ, $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\Longrightarrow$ $y + x - 6 = 0$, $y = 2x^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = -x + 6$

ಇದರಿಂದ, $y = 2x^2$ ಮತ್ತು $y = -x + 6$ ರ ನಕ್ಷೆಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $2x^2 + x - 6 = 0$ ಯ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ, $y = -x + 6$ ಸರಳರೇಖೆಗಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.5

x	–1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಪರವಲಯದ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳು (–2 , 8) ಮತ್ತು (1.5 , 4.5) ಆಗಿವೆ. ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –2 ಮತ್ತು 1.5 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^2 + x - 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{-2, 1.5\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 + 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೊದಲು, $y = x^2 + 3x + 2$ ಕ್ಕಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

(–4, 6), (–3, 2), (–2, 0), (–1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12) ಮತ್ತು (3, 20) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = x^2 + 3x + 2$ ರ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ..

ಈಗ, $x^2 + 2x + 4 = 0$

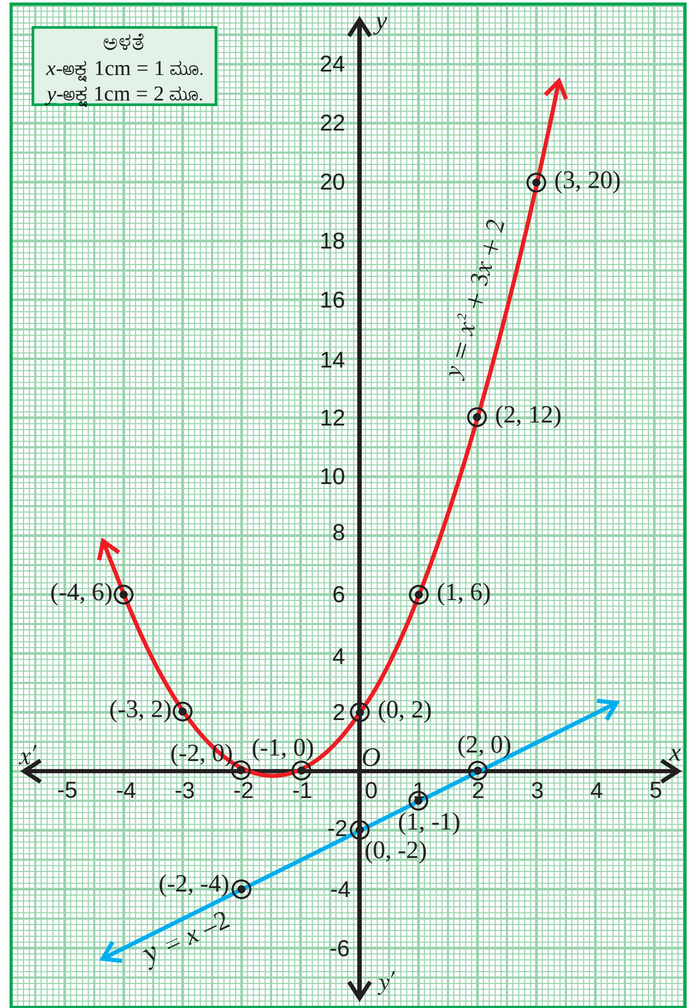
$\Longrightarrow \quad x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

$\Longrightarrow \quad y = x - 2 \quad \because y = x^2 + 3x + 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು $y = x - 2$ ಮತ್ತು $y = x^2 + 3x + 2$ ರ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$y = x - 2$ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, $y = x - 2$ ರ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	–2	0	1	2
$y = x - 2$	–4	–2	–1	0



ಚಿತ್ರ 10.6

$y = x - 2$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y = x^2 + 3x + 2$ ವಕ್ರವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

   (i) $y = 3x^2$ (ii) $y = -4x^2$

   (iii) $y = (x + 2)(x + 4)$ (iv) $y = 2x^2 - x + 3$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   (i) $x^2 - 4 = 0$ (ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$

   (iii) $(x - 5)(x - 1) = 0$ (iv) $(2x + 1)(x - 3) = 0$

3. $y = x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 - 4x - 5 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
4. $y = x^2 + 2x - 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $x^2 - x - 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $y = 2x^2 + x - 6$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $2x^2 + x - 10 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
6. $y = x^2 - x - 8$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $x^2 - 2x - 15 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $y = x^2 + x - 12$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 + 2x + 2 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

10.3 ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು (Some Special Graphs)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು (i) ನೇರ ಅನುಪಾತ (ii) ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

y ಎಂಬುದು x ಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಲವು ಧನಾತ್ಮಕ k ಗೆ, $y = kx$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯು ಸರಳರೇಖೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

y ಎಂಬುದು x ಗೆ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಲವು ಧನಾತ್ಮಕ k ಗೆ, $y = \frac{k}{x}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯು ನಯವಾದ ವಕ್ರವಾಗಿದ್ದು, ಅದನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಅತಿಪರವಲಯ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಆಯತಾಕಾರದ ಅತಿಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವು $xy = k,\ k > 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.)

ಉದಾಹರಣೆ 10.7

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿರಿ.

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

ಇದರಿಂದ, $x = 4$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ, x ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, y ಕೂಡ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅನುಪಾತವು ನೇರ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.

$y = kx$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\implies \frac{y}{x} = k$$

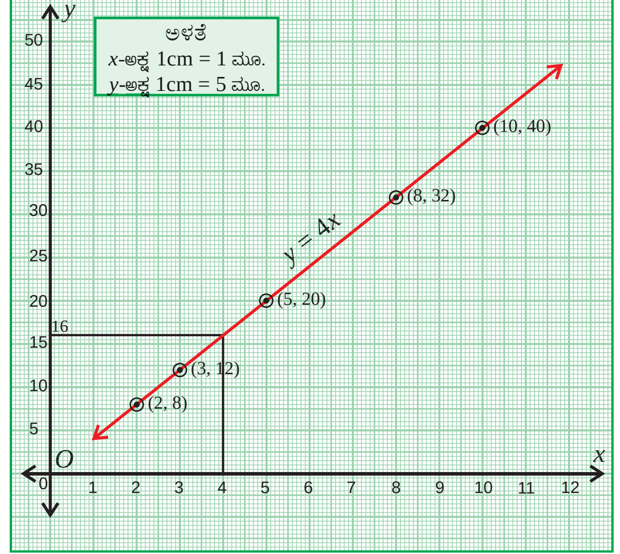
ಇಲ್ಲಿ, k ಎಂಬುದು ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ,

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. \quad \therefore k = 4$$

$y = 4x$ ಸಂಬಂಧವು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ.

(2, 8), (3, 12), (5, 20), (8, 32) ಮತ್ತು (10, 40) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.7

$x = 4$ ಆದಾಗ $y = 4x = 16$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.8

ಒಬ್ಬ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನು A ಸ್ಥಳದಿಂದ B ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಅವನ ಚಲನೆಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ಅವನು ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಅನುಗುಣವಾದ ಕಾಲಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ವೇಗ ಕಿ.ಮೀ / ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ x	2	4	6	10	12
ಕಾಲ ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ y	60	30	20	12	10

ವೇಗ–ಕಾಲ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ, (i) 5 ಕಿ.ಮೀ / ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಅವನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ ಮತ್ತು (ii) 40 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಚಲಿಸಬೇಕಾದ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ, x ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, y ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಧದ ಅನುಪಾತವನ್ನು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $xy = 120$.

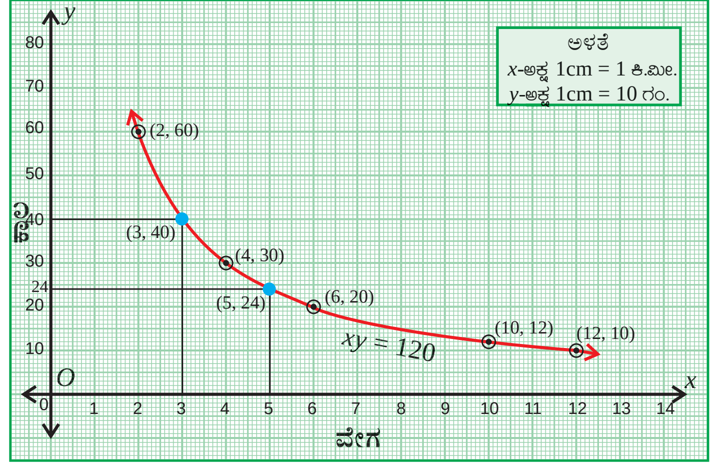
ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \frac{120}{x}$.

(2 , 60), (4 , 30), (6 , 20), (10 , 12) ಮತ್ತು (12 , 10) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿ.

ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,

(i) 5 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಅವನಿಗೆ 24 ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.

(ii) 40 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಚಲಿಸಬೇಕಾದ ವೇಗವು 3 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.8

ಉದಾಹರಣೆ 10.9

ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕು ಹಿರಿಯ ನಾಗರೀಕರಿಗೆ ಅವರ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲೆ 10% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಠೇವಣಿ ಹೂಡಿದ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಗಳಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಕ್ಕಾಗಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ, (i) ₹650 ರ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮತ್ತು (ii) ₹45 ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಗಳಿಸಲು ಠೇವಣಿ ಹೂಡಬೇಕಾದ ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ.

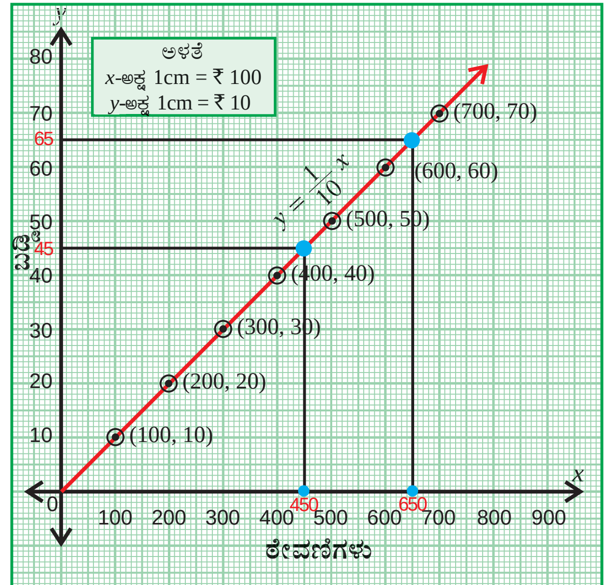
ಠೇವಣಿ ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
ಗಳಿಸಿದ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

$y = \frac{1}{10}x$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ನಾವು ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ,

(i) ₹650 ರ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ₹65 ಆಗಿದೆ.

(ii) ₹ 45 ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಗಳಿಸಲು ಠೇವಣಿ ಹೂಡಬೇಕಾದ ಮೊಬಲಗುವು ₹450 ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.9

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಒಂದು ಬಸ್ಸು 40 ಕಿ.ಮೀ. / ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ದೂರ–ಕಾಲ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ, 3 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಸ್ಸು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಖರೀದಿಸಿದ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x	2	4	6	8	10	12
ಬೆಲೆ ₹ y	30	60	90	120	150	180

ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ (i) ಏಳು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ii) ₹ 165 ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಬಹುದು?

3.

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ,
(i) $x = 4$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು
(ii) $y = 12$ ಆದಾಗ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 15. ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ,
(i) ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮತ್ತು
(ii) 3 ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $xy = 20$, $x, y > 0$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಕ್ಷೆಯಿಂದ $x = 5$ ಆದಾಗ y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು $y = 10$ ಆದಾಗ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ x	3	4	6	8	9	16
ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ y	96	72	48	36	32	18

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ 12 ಕೆಲಸಗಾರರು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು

1. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವ ಕಲೆಯು ಅದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಉನ್ನತವಾಗಿರಬೇಕು
   - **ಜಾರ್ಜ್ ಕ್ಯಾಂಟರ್**
2. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ವಿಶೇಷವಾದ ಪ್ರಶಂಸೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಒಂದು ಕಾರಣವೆಂದರೆ, ಇನ್ನುಳಿದ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಿಗಿಂತ ಇದರ ನಿಯಮಗಳು ನಿರಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿರುವಂತಹವು ಮತ್ತು ವಿವಾದರಹಿತವಾದವು. ಆದರೆ, ಇನ್ನುಳಿದ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ನಿಯಮಗಳು ಕೆಲವು ಮಿತಿಯವರೆಗೆ ವಿವಾದಾಸ್ಪದವಾಗಿರುವಂತಹವು ಮತ್ತು ಹೊಸ ಸಂಶೋಧನಾ ಸಂಗತಿಗಳಿಂದ ನಶಿಸಿಹೋಗುವ ಸ್ಥಿರ ಅಪಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಹವು - **ಆಲ್ಬರ್ಟ್ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್**

11

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು
  - ವ್ಯಾಪ್ತಿ
  - ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ
  - ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ
- ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ



ಕಾರ್ಲ್ ಪೀಯರ್‌ಸನ್

(1857-1936)

ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್

ಕಾರ್ಲ್ ಪೀಯರ್‌ಸನ್‌ರವರು ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರರಾಗಿದ್ದು, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಧುನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಮುಂಚೂಣಿಯ ಸ್ಥಾಪಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತನ್ನು ನೆಲೆಗೊಳಿಸಿದವರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ಸ್ವೀಕರಿಸಿದ ಮಹತ್ವ ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಇವರು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು.

ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್ ಮತ್ತು ಇತರೆ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಹಲವಾರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಇವರ 'ವಿಜ್ಞಾನದ ವ್ಯಾಕರಣ' ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವು ಮೊದಲೇ ಒಳಗೊಂಡಿತ್ತು.

11.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಕ್ರಾಕ್ಸ್‌ಟನ್ ಮತ್ತು ಕೌಡನ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆರ್.ಎ.ಫಿಷರ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಜ್ಞಾನವು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರುವುದು ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಹೊರೇಸ್ ಸೆಕ್ರಿಸ್ಟ್‌ರವರು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ.

"ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ಪೂರ್ವ ನಿಯೋಜಿತ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗಾಗಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರವಾಗಿ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ, ನಿಖರತೆಯ ಯುಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎಣಿಸಿದ ಅಥವಾ ಅಂದಾಜಿಸಿದ, ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದ, ಕಾರಣಗಳ ವೈವಿಧ್ಯತೆಯಿಂದ ಗುರುತರವಾದ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಿದ ನಿಜ ಸಂಗತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಅರ್ಥೈಸುತ್ತೇವೆ".

'ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ' ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ಜೆ.ಎಫ್.ಬ್ಯಾರನ್ ರವರು ತಮ್ಮ "ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ವಿದ್ವತ್ತಿನ ಅಂಶಗಳು" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಆಧುನಿಕ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಪಟ ಹಾಗೂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸುತ್ತುವರಿಯಲು ಮತ್ತು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯ ಮುಖದಲ್ಲಿ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವ ಪೂರ್ಣ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳಾದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಅವು ವಿತರಣೆಯ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಭಾಗದ ಬಗ್ಗೆ ದತ್ತಾಂಶದ ದಟ್ಟಣೆಯ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳ ಜ್ಞಾನವು ವಿತರಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಪೂರ್ಣ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (i) 82, 74, 89, 95 ಮತ್ತು

(ii) 120, 62, 28, 130. ಮೇಲಿನ ಎರಡು ವಿತರಣೆಗಳು ಒಂದೇ ಸರಾಸರಿ 85 ನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಾಸರಿ 85 ಕ್ಕೆ ಸಾಮೀಪ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಾಸರಿ 85 ರಿಂದ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಚದುರಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ನಮ್ಮನ್ನು ಹಾದಿ ತಪ್ಪಿಸಬಹುದು. ಸರಾಸರಿಯ ಸುತ್ತಲೂ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಹೇಗೆ ಚದುರಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುವ ಅಳತೆಯ ಅಗತ್ಯತೆಯು ನಮಗಿದೆ.

11.2 ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು (Measures of dispersion)

ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶದ ಚದುರುವಿಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತವೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿ (R), ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನೆ (Q.D), ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನೆ (M.D) ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (S.D) ಗಳು ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

11.2.1 ವ್ಯಾಪ್ತಿ (Range)

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಸರಳವಾದ ಹರವಿನ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ − ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ

$= L - S.$

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು $\frac{L-S}{L+S}$ ರಿಂದ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.1

43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 ರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಾವು ಜೋಡಿಸೋಣ.

22, 24, 38, 39, 43, 45, 56.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ, $L = 56$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ, $S = 22$.

$\therefore$ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{L-S}{L+S}$

$= \frac{56-22}{56+22} = \frac{34}{78} = 0.436.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.2

ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ 13 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಗಳಲ್ಲಿ) 42.5, 47.5, 48.6, 50.5, 49, 46.2, 49.8, 45.8, 43.2, 48, 44.7, 46.9, 42.4 ಆಗಿವೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಾವು ಜೋಡಿಸೋಣ.

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $L = 50.5$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $S = 42.4$.

ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= L - S$

$= 50.5 - 42.4 = 8.1.$

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \frac{8.1}{92.9}$

$= 0.087.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.3

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 7.44 ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 2.26 ಆದರೆ, ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $-$ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ

$\Longrightarrow$ 7.44 $-$ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 2.26$

$\therefore$ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 7.44 - 2.26 = 5.18.$

11.2.2 ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (Standard deviation)

ಹರವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಪ್ರತಿ ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವಾದ ಮಾರ್ಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಹರವಿನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಾಸ್‌ರವರು ಬಳಸಿದ್ದ 'ಸರಾಸರಿ ದೋಷ' ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ 'ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ' ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ಕಾರ್ಲ್ ಪೀಯರ್‌ಸನ್‌ರವರು 1894 ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದರು.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ದತ್ತಾಂಶಗಳಂತೆ ಅದೇ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಚದುರಿದೆ ಅಥವಾ ಹರಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ದತ್ತಾಂಶವು ಸರಾಸರಿಗೆ ತುಂಬಾ ಸಾಮೀಪ್ಯವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಲೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ದತ್ತಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹರಡಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\overline{x}$ ಮತ್ತು σ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿ, (ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದ ನಂತರ) ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ σ ವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ದತ್ತಾಂಶ	ನೇರ ವಿಧಾನ	ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ	ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ	ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ
ಅವರ್ಗೀಕೃತ	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ $d = x - \overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ $d = x - A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$ $d = \frac{x - A}{c}$
ವರ್ಗೀಕೃತ		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

ಸೂಚನೆ

n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ (ಸಂಖ್ಯೆಗಳ) ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ $\sum(x - \overline{x}) = 0$, $\sum x = n\overline{x}$ ಮತ್ತು $\sum \overline{x} = n\overline{x}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(i) ನೇರ ವಿಧಾನ (Direct method)

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಾಗ ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11.4

ಒಂದು ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಓದಿದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10 ಆಗಿವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x = 68$	$\sum x^2 = 690$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ , $n = 8$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{14} \simeq 3.74.$

(ii) ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Actual mean method)

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸರಾಸರಿಯು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಬಳಸಬಹುದು.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ , $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}}$ ಅಥವಾ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$. ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.5

ಒಂದು ತರಗತಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಞಾನದ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು. 6 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 40 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು 20, 14, 16, 30, 21 ಮತ್ತು 25 ಆಗಿವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $= \frac{\sum x}{n} = \frac{20 + 14 + 16 + 30 + 21 + 25}{6}$

$\Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ.

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	−7	49
16	−5	25
20	−1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

$\therefore \quad \sigma \simeq 5.36.$

(iii) ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Assumed mean method)

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. $x–A$ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೆಲ್ಲವೂ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ A ನ್ನು ನಾವು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ A ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, ಸರಾಸರಿಗೆ ಸಾಮೀಪ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

$d = x - A$ ನ್ನು ಬಳಸಿ ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$.

ಸೂಚನೆ

ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನಗಳು ನೇರ ವಿಧಾನದ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.6

62, 58, 53, 50, 63, 52, 55 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A=55 ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	$d = x - A$ $= x - 55$	d^2
50	-5	25
52	-3	9
53	-2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$
$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$
$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma \simeq 4.64$

(iv) ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ (Step deviation method)

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ನಾವು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು $d = \frac{x - A}{c}$ ಬಳಸಿ d ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, c ಎಂಬುದು $x–A$ ನ ಬೆಲೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.7

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು 80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80 ಆಗಿವೆ. ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು 10 ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$A = 70$ ನ್ನು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n = 10$.

$c = 10$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $d = \frac{x - A}{10}$. ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	$d = \frac{x-70}{10}$	d^2
30	-4	16
40	-3	9
50	-2	4
60	-1	1
60	-1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d = -4$	$\sum d^2 = 46$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \left(\frac{-4}{10}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \frac{16}{100}} \times 10 = \sqrt{\frac{460 - 16}{100}} \times 10$$

$\therefore$ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma \simeq 21.07$.

ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, ನೇರ ವಿಧಾನ, ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ, ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನೆಯ ವಿಧಾನ.

ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದಂತೆ, ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳು σ ದ ವಿಭಿನ್ನ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಲಹೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ವಿತರಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಅದೇ ಪರಿಮಾಣ k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿ ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11.8

3, 5, 6, 7 ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ 4 ನ್ನು ಕೂಡಿರಿ ಮತ್ತು ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶ 3, 5, 6, 7.

$A = 6$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x	$d = x - 6$	d^2
3	-3	9
5	-1	1
6	0	0
7	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ 4 ನ್ನು ಕೂಡಿ 7, 9, 10, 11 ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. $A = 10$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x	$d = x - 10$	d^2
7	-3	9
9	-1	1
10	0	0
11	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 4 ನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ ಕೂಡ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.9

40, 42 ಮತ್ತು 48 ರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶ 40, 42, 48 ಆಗಿದೆ.

ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 44 ಆಗಿರಲಿ.

x	$d = x - 44$	d^2
40	-4	16
42	-2	4
48	4	16
	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 36$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

$\sigma = \frac{\sqrt{104}}{3}$

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ 120,126,144 ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 132 ಆಗಿರಲಿ. ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು σ_1 ಆಗಿರಲಿ.

x	$d = x - 132$	d^2
120	-12	144
126	-6	36
144	12	144
	$\sum d = -6$	$\sum d^2 = 324$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಕೂಡ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.10

ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $1, 2, 3, \cdots, n$.

ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾದ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವುದೇ n ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆದರೆ, $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

(i) $i, i+1, i+2, \cdots, i+n$ ರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $i \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.

(ii) ಯಾವುದೇ n ಅನುಕ್ರಮ ಸಮ(ಸರಿ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.

(iii) ಯಾವುದೇ n ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.11

ಮೊದಲ 10 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

ಮೊದಲ 10 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

$$= \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87.$$

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (Standard Deviation of grouped data)

(i) ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Actual mean method)

ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ, ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \bar{x}$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.12

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ 48 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತಾಂಶ x	6	7	8	9	10	11	12
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ f	3	6	9	13	8	5	4

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	f	fx	$d = x - \bar{x}$ $= x - 9$	fd	fd^2
6	3	18	-3	-9	27
7	6	42	-2	-12	24
8	9	72	-1	-9	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f = 48$	$\sum fx = 432$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum fd^2 = 124$

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{432}{48} = 9.$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}}$$

$$= \sqrt{2.58} \simeq 1.61.$$

(ii) ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Assumed mean method)

ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವಾಗ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವು

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2}$$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $d = x - A$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.13

ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

ಪರಿಹಾರ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು $A = 82$ ಎಂದು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	– 12	– 12	144
74	3	– 8	– 24	192
78	5	– 4	– 20	80
82	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$$

$$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$$

ಉದಾಹರಣೆ 11.14

ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	9	14	22	11	17

ಪರಿಹಾರ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 6 ಆಗಿರಲಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	x ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5-4.5	4	9	−2	−18	36
4.5-5.5	5	14	−1	−14	14
5.5-6.5	6	22	0	0	0
6.5-7.5	7	11	1	11	11
7.5-8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 \simeq 1.74$.

(iii) ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ (Step deviation method)

ಉದಾಹರಣೆ 11.15

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ 71 ಮುಂಚೂಣಿಯ ಆಟಗಾರರು ಗಳಿಸಿದ ಗೋಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	8	12	17	14	9	7	4

ಪರಿಹಾರ $A = 35$ ಆಗಿರಲಿ. 4 ನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ, $c = 10$.

ವರ್ಗಾಂತರ	x ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ	f	$x–A$	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
0−10	5	8	−30	−3	−24	72
10−20	15	12	−20	−2	−24	48
20−30	25	17	−10	−1	−17	17
30−40	35	14	0	0	0	0
40−50	45	9	10	1	9	9
50−60	55	7	20	2	14	28
60−70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$

$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$

$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma \simeq 16.67$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.16

ತಂತಿಯ 40 ತುಂಡುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹತ್ತಿರದ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕೆಳಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದ್ದ ಸೆಂ.ಮೀ.	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
ತುಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	12	9	5	1

ಪರಿಹಾರ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 35.5 ಆಗಿರಲಿ.

ಉದ್ದ	ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ x	ತುಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	$d= x-A$	fd	fd^2
1-10	5.5	2	-30	-60	1800
11-20	15.5	3	-20	-60	1200
21-30	25.5	8	-10	-80	800
31-40	35.5	12	0	0	0
41-50	45.5	9	10	90	900
51-60	55.5	5	20	100	2000
61-70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \frac{7600}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2$

$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75.$

11.2.3 ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ (coefficient of variation)

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು $\text{C.V} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $\overline{x}$ ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು σ ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ನಮಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವು ಕಡಿಮೆ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.17

ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : 18, 20, 15, 12, 25.

ಪರಿಹಾರ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x} = \dfrac{12+15+18+20+25}{5} = \dfrac{90}{5} = 18.$

x	$d = x - 18$	d^2
12	-6	36
15	-3	9
18	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$

$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.427.$$

$\therefore$ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$

$$= \frac{4.427}{18} \times 100 = \frac{442.7}{18}.$$

$\therefore$ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 24.6 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.18

5 ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ದಾಂಡಿಗರು ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ. ಓಟಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ?

ದಾಂಡಿಗ A	38	47	34	18	33
ದಾಂಡಿಗ B	37	35	41	27	35

ಪರಿಹಾರ

ದಾಂಡಿಗ A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	– 16	256
33	– 1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

ಈಗ, $\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4}$$

$$\simeq 9.4 .$$

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ , C.V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{9.4}{34} \times 100$$

$$= \frac{940}{34}$$

$$= 27.65 .$$

$\therefore$ ದಾಂಡಿಗ A ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 27.65 ಆಗಿದೆ. (1)

ದಾಂಡಿಗ B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	– 8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8}$$

$$\simeq 4.6.$$

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ,C.V= $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{4.6}{35} \times 100$$

$$= \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14.$$

$\therefore$ ದಾಂಡಿಗ B ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 13.14 ಆಗಿದೆ. (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, B ನ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು A ನ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ.

$\therefore$ ಓಟಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ದಾಂಡಿಗ B ಯು ದಾಂಡಿಗ A ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯುಳ್ಳವರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.19

30 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 18 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 3 ಆಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

30 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ, $\bar{x} = 18$

30 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ , $\sum x = 30 \times 18 = 540$ $\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n}\right)$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ , $\sigma = 3$

ಈಗ, $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 9720 = 270$$

$$\sum x^2 = 9990$$

$\therefore \quad \sum x = 540$ ಮತ್ತು $\sum x^2 = 9990.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.20

20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 40 ಮತ್ತು 15 ಆಗಿವೆ. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 43 ನ್ನು 53 ಎಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂತು. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ , $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

ಈಗ, ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sum x = 800 + 43 - 53 = 790.$

$\therefore$ ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ $= \frac{790}{20} = 39.5$

ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$ (ಕೊಟ್ಟಿದೆ)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500.$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sum x^2 = 36500 - 53^2 + 43^2 = 36500 - 2809 + 1849$

$= 36500 - 960 = 35540.$

ಈಗ, ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sigma^2 = \frac{\text{ಸರಿಪಡಿಸಿದ} \sum x^2}{n}$ – (ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ)^2

$= \frac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75.$

ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72.$

$\therefore$ ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ = 39.95 ಮತ್ತು ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $\simeq$ 14.72.

ಉದಾಹರಣೆ 11.21

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ, $\sum x = 35$, $n = 5$, $\sum(x-9)^2 = 82$ ಆದರೆ, $\sum x^2$ ಮತ್ತು $\sum(x-\overline{x})^2$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\sum x = 35$ ಮತ್ತು $n = 5$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ $\sum(x-9)^2 = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum(x^2 - 18x + 81) = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \because \sum x = 35$ ಮತ್ತು $\sum 1 = 5$

$\Longrightarrow \quad \sum x^2 = 307.$

$\sum(x-\overline{x})^2$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ,

$\sum(x-9)^2 = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum(x-7-2)^2 = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum[(x-7)-2]^2 = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum(x-7)^2 - 2\sum[(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4\sum(x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$

$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5$ ಮತ್ತು $\sum(x-\overline{x}) = 0$

$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 = 62$

$\therefore \quad \sum x^2 = 307$ ಮತ್ತು $\sum(x-\overline{x})^2 = 62.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.22

ಎರಡು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕಗಳು 58 ಮತ್ತು 69 ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳು 21.2 ಮತ್ತು 15.6 ಆಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗಳೇನು?

ಪರಿಹಾರ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ, $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100..$$

ಮೊದಲ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x}_1 = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$

$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 58$ ಮತ್ತು $\sigma = 21.2$

$= \frac{2120}{58} = 36.6.$

ಎರಡನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x_2} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$= \frac{15.6}{69} \times 100$ $\because$ C.V = 69 ಮತ್ತು σ = 15.6

$= \frac{1560}{69}$

$= 22.6.$

ಮೊದಲ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ = 36.6 ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ = 22.6.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52,35, 29

   (ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5

2. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 12 ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 59 ಆಗಿದೆ. ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 50 ಅಳತೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 3.84 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 0.46 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಆದರೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. 20 ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sqrt{5}$ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಫಲಿತ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಮೊದಲ 13 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 10, 20, 15, 8, 3, 4   (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34

7. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಪುಸ್ತಕ ಮೇಳದಲ್ಲಿ ಖರೀದಿಸಿದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	35	64	68	18	15

9. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

10. ಒಂದು ಕಾಲುದಾರಿಯನ್ನು ನಡೆದು ಕ್ರಮಿಸಲು ಜನರ ಒಂದು ಗುಂಪು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವನ್ನು (ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕಾಲ (ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ	4	8	15	12	11

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. 45 ಮನೆಗಳ ಮಾಲೀಕರ ಒಂದು ಗುಂಪು ತಮ್ಮ ಬೀದಿಯ ಪರಿಸರವನ್ನು ಹಸಿರುಗೊಳಿಸಲು ಹಣವನ್ನು ನೀಡಿದರು. ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಹಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹಣ (₹)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ಮನೆ ಮಾಲೀಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	7	12	19	5

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	15	25	28	12	12	8

13. 100 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 48 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 10 ಆಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. 20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿವೆ. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 12 ನ್ನು 8 ಎಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ನಮೂದಿಸಿರುವುದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $n = 10$, $\overline{x} = 12$ ಮತ್ತು $\sum x^2 = 1530$ ಆದರೆ, ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: 20, 18, 32, 24, 26.

17. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 57 ಮತ್ತು ಇದರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 6.84 ಆದರೆ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವು 163.8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅವರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 3.2 ಆಗಿವೆ. ಅವರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯೇನು?

19. $\sum x = 99$, $n = 9$ ಮತ್ತು $\sum (x-10)^2 = 79$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಿಂದ $\sum x^2$ ಮತ್ತು $\sum (x-\overline{x})^2$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ A , B ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವವರು ಯಾರು?

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 , 29 ಮೊದಲ 10 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು

   (A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 14.1 ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 28.4 ಆದರೆ, ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು

   (A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 72 ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 28 ಆಗಿದೆ. ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವು

   (A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4 11 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ, $\Sigma x = 132$ ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯು

   (A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5. n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಯಾವುದೇ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ, $\Sigma(x - \overline{x}) =$

   (A) Σx (B) $\bar{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6. n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಯಾವುದೇ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ, $(\Sigma x) - \overline{x} =$

   (A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7. $x, y. z$ ಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು t ಆದರೆ, $x+5,\ y+5,\ z+5$ ಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಗಣದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 1.6 ಆದರೆ, ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು 12.25 ಆದರೆ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10. ಮೊದಲ 11 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11. 10, 10, 10, 10, 10 ರ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12. 14, 18, 22, 26, 30 ರ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯು 32 ಆದರೆ, 28, 36, 44, 52, 60 ರ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $2\sqrt{2}$ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14. $\sum(x-\overline{x})^2 = 48$, $\overline{x} = 20$ ಮತ್ತು $n = 12$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 48 ಮತ್ತು 12 ಆಗಿವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- (i) ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= L - S$, ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.

  (ii) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{L-S}{L+S}$.

- ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

  (i) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$ ಮತ್ತು $\overline{x}$ ಎಂಬುದು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

  (ii) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - A$ ಮತ್ತು A ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

- ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

  (i) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$ ಮತ್ತು $\overline{x}$ ಎಂಬುದು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

  (ii) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - A$ ಮತ್ತು A ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

- ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ದತ್ತಾಂಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

- ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ದತ್ತಾಂಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು k ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

- ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

- ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ, C.V $= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗಳ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

12 ಸಂಭವನೀಯತೆ

It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge *-P.D. Laplace*

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
- ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ



ಪೀರೆ ಡಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್

(1749-1827)

ಫ್ರಾನ್ಸ್

ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್‌ರವರನ್ನು ಸರ್ವ ಕಾಲಿಕ ಶ್ರೇಷ್ಠ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಇವರನ್ನು ಫ್ರೆಂಚಿನ ನ್ಯೂಟನ್ ಎಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

1812 ರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಮೂಲಭೂತ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದರು. ಇವರು ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅನುಗಮನ ಚಿಂತನೆಯ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರು. ಇವರು ಮಾತ್ರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದು "ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಪರವಾದ ಘಟನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ಘಟನೆಗಳ ಅನುಪಾತ" ಆಗಿದೆ.

12.1 ಪೀಠಿಕೆ

ದಿನನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡುವ ಅಥವಾ ಮಾಡುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಯಗಳು ಅವಕಾಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳಾದ ಭೂಕಂಪಗಳು, ಚಂಡಮಾರುತಗಳು, ಸುನಾಮಿ, ಮಿಂಚು, ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿಯ ಹಲವಾರು ಘಟನೆಗಳು ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವು ಮಾನವ ಜಗತ್ತಿಗೆ ನಷ್ಟವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ನಾವು ಹಿಂದೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಘಟನೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಇಂತಹ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದಾಗ ಮಾನವ ಸಮಾಜಕ್ಕೆ ಆಗಬಹುದಾದ ಅನಾಹುತಗಳನ್ನು ತಡೆಗಟ್ಟಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅಧ್ಯಯನವು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

1654ರಲ್ಲಿ ಚವಲಿಯರ್ ಡಿ ಮೆರೆನಿಂದ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಜೂಜುಗಾರರ ವಿವಾದಾಸ್ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಬ್ಲೇಸಿ ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್ ಮತ್ತು ಪೀರೆ ಡಿ ಫರ್ಮಾಟ್ ಈರ್ವರ ನಡುವೆ ಪತ್ರಗಳನ್ನು ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿಸಿತು ಮತ್ತು ಇದು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿತು. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಕೊಡುಗೆ ನೀಡಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೆಂದರೆ ಕ್ರಿಶ್ಚಿಯನ್ ಹಗ್ಗನ್ಸ್ (1629–1695), ಬರ್ನೊಲಿ (1654–1705), ಡಿ ಮಾಯಿರ್ (1667–1754), ಪೀರೆ ಡಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್ (1749–1827), ಗಾಸ್ (1777–1855), ಪಾಯ್ಸನ್ (1781–1845), ಚೆಬಿಷೇವ್ (1821–1894), ಮಾರ್ಕೋವ್ (1856–1922). 1933 ರಲ್ಲಿ ರಷ್ಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಎ. ಕೊಲ್ಮೊಗೊರೋವ್‌ರವರು ಆಧುನಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಆಧಾರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಸ್ವಯಂ ಪ್ರಮಾಣಿತ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಂಭವಿಸುವ ಅಥವಾ ಸಂಭವಿಸದ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ, ಪ್ರಯತ್ನ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು 'ಪ್ರಯೋಗ' ಮತ್ತು 'ಫಲಿತಾಂಶ' ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ವಿಶಾಲ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಅಥವಾ ಅಳತೆಯ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನವಜಾತ ಶಿಶುವು ಗಂಡೋ ಅಥವಾ ಹೆಣ್ಣೋ, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುವುದು, ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವ ಮೊದಲೇ ನಿಖರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯಲಾಗದ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವನ್ನು S ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ನ ಉಪಗಣವನ್ನು ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

A ಯು S ನ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಾಗ, A ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶವು ಬಂದರೆ, ಆಗ ನಾವು ಘಟನೆ A ಯು ಸಂಭವಿಸಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ, ಘಟನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸೋಣ.

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ	ಫಲಿತಾಂಶಗಣ	ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳು
ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವುದು	$S=\{H,T\}$	ಶಿರ $\{H\}$ ಸಂಭವಿಸುವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ. ಪುಚ್ಛ $\{T\}$ ಸಂಭವಿಸುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.
ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವುದು	$S=\{HT,HH,TT,TH\}$	{HT,HH} ಮತ್ತು {TT} ಗಳು ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.
ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸುವುದು	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{3\}$ ಮತ್ತು $\{6\}$ ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳು (Equally likely events)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ, ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ ಬರುವುದು ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು (Mutually exclusive events)

ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಇತರೆ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಬಂಧಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $A \cap B = \phi$ ಆಗುತ್ತದೆ.

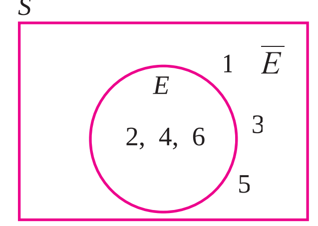


ಚಿತ್ರ 12.1

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಶಿರ ಬರುವುದು ಪುಚ್ಛ ಬರುವುದನ್ನು ಪ್ರತಿಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮುಖಗಳು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಆರು ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು (Complementary events)

E ಎಂಬುದು ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವು S ಆಗಿರಲಿ. E ನಲ್ಲಿ ಇರದ ಆದರೆ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು E ನ ಪೂರಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು $\overline{E}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $\overline{E} = S - E$. E ಮತ್ತು $\overline{E}$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.2

ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, $E = \{2, 4, 6\}$ ಎಂಬುದು 2ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ E ನ ಪೂರಕ ಘಟನೆಯು $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ ಆಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.2 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳು (Exhaustive events)

$E_1, E_2, \cdots, E_n$ ಘಟನೆಗಳು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ಆಗಿರಬೇಕು.

ಖಚಿತ ಘಟನೆ (Sure event)

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವು ಪ್ರಯೋಗದ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಖಚಿತ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ರಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಖಚಿತ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ (Impossible event)

ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಭವಿಸದ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ϕ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 7ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

ಪರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (Favourable outcomes)

ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ ಘಟನೆಗೆ ಪೂರಕವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಘಟನೆಯ ಪರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ E ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯಾದರೆ, 1, 3, 5 ಫಲಿತಾಂಶಗಳು E ಘಟನೆಗೆ ಪರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣಗಳು ಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾಣ್ಯಗಳು ಅಥವಾ ದಾಳಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ, ಅವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದವು ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

12.2 ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Classical definition of probability)

ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವು n ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ m ಫಲಿತಾಂಶಗಳು A ಘಟನೆಯ ಪರವಾಗಿದ್ದರೆ, $n(S) = n$ ಮತ್ತು $n(A) = m$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು $P(A)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು m ಮತ್ತು n ಗಳ ನಡುವಿನ ಅನುಪಾತ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $$P(A) = \frac{A \text{ ಗೆ ಪರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\therefore \; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}.$$

ಸೂಚನೆ

(i) ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದಾಗ ಮತ್ತು ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅವೆರಡನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $0 \le P(A) \le 1$.

(iii) ಖಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $P(S) = 1$.

(iv) ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $P(\phi) = 0$.

(v) A ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

$$\text{P(A ಸಂಭವಿಸದ)} = P(\overline{A}) \text{ ಅಥವಾ } P(A') = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} \text{ ಆಗಿದೆ.}$$

$$\Longrightarrow \; P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

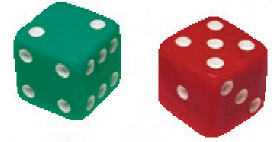
(vi) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.1

ಒಂದು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತದ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಸಂಖ್ಯೆ 4 (ii) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) 6 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (iv) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ



ಚಿತ್ರ 12.3

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$\therefore n(S) = 6$.

(i) ಸಂಖ್ಯೆ 4 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$A = \{4\} \; \therefore n(A) = 1$.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

(ii) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$B = \{2,4,6\} \quad \therefore \; n(B) = 3$.

ಇದರಿಂದ, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

(iii) 6 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

$C = \{2,3\} \quad \therefore\ n(C) = 2.$

ಇದರಿಂದ, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

(iv) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು D ಆಗಿರಲಿ.

$D = \{5,6\} \quad n(D) = 2.$

ಇದರಿಂದ, $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.2

ಒಂದು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಎರಡು ಶಿರಗಳು (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರ (iii) ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪುಚ್ಛ

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ $S = \{HH, HT, TH, TT\}.$

$\therefore \quad n(S) = 4.$

(i) ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $A = \{ HH \}.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(A) = 1.$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}.$

(ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $B = \{ HH, HT, TH \}.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(B) = 3.$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}.$

(iii) ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $C = \{ HT, TH \}.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(C) = 2.$

$\therefore \quad P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.3

ಮೊದಲ ಇಪ್ಪತ್ತು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ, $S = \{ 1, 2, 3, \cdots, 20 \}.$

$\therefore \quad n(S) = 20.$

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$

$n(A) = 8.$

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.4

35 ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 7 ವಸ್ತುಗಳು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ದೋಷರಹಿತವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಟ್ಟು ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n(S) = 35$.

ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 7.

ದೋಷರಹಿತ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

ದೋಷರಹಿತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n(A) = 35 - 7 = 28$.

$\therefore$ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ವಸ್ತುವು ದೋಷರಹಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}.$$

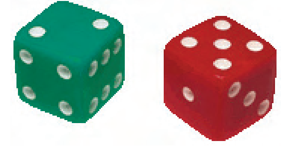
ಉದಾಹರಣೆ 12.5

ಎರಡು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮೊತ್ತ 8 (ii) ದ್ವಿವಳಿ (iii) ಮೊತ್ತವು 8 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ

ಪರಿಹಾರ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$



ಚಿತ್ರ 12.4

$\therefore\ n(S) = 6 \times 6 = 36$

(i) ಮೊತ್ತ 8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\quad A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

ಆಗ, $n(A) = 5$.

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$.

(ii) ದ್ವಿವಳಿ ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\quad B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

ಆಗ, $n(B) = 6$.

$\therefore\quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(iii) ಮೊತ್ತವು 8 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $C = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(\mathrm{C}) = 10$.

$\therefore\quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.6

52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳಿರುವ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಮಿಶ್ರಣ ಮಾಡಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ರಾಜ (ii) ಕಪ್ಪು ರಾಜ

(iii) ಸ್ಪೇಡ್ ಎಲೆ (iv) ಡೈಮಂಡ್ 10.

52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ಪೇಡ್ ♠	ಹಾರ್ಟ್ ♥	ಕ್ಲೇವರ್ ♣	ಡೈಮಂಡ್ ♦
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $n(S) = 52$.

(i) ರಾಜ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore n(A) = 4.$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) ಕಪ್ಪು ರಾಜ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(B) = 2$.

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

(iii) ಸ್ಪೇಡ್ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(C) = 13$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

(iv) ಡೈಮಂಡ್ 10 ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು D ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(D) = 1$.

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{52}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.7

35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 20 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 15 ಹುಡುಗಿಯರಿದ್ದಾರೆ. ಇವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು (i) ಹುಡುಗ (ii) ಹುಡುಗಿ, ಆಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವು S ಆಗಿರಲಿ.

ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು G ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ n(S) = 35,\ n(B) = 20$ ಮತ್ತು $n(G) = 15$.

(i) ಹುಡುಗನೊಬ್ಬನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{35}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{7}.$$

(ii) ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{15}{35}$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{3}{7}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.8

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಳೆ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.76 ಆದರೆ, ಆ ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಳೆ ಬೀಳದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ ಮಳೆ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಮಳೆ ಬೀಳದಿರುವ ಘಟನೆಯು $\overline{A}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$P(A) = 0.76$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(\overline{A}) = 1 - 0.76 \quad \because P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$= 0.24.$

$\therefore$ ಮಳೆ ಬೀಳದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.24 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12.9

ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿರುವ ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n(S) = 5 + x$.

ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು R ಆಗಿರಲಿ.

$P(B) = 3P(R)$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 15$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 15$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.10

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕ ವರ್ಷವು 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು;

(ii) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕ ವರ್ಷವು 52 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವುದು;

(iii) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ವರ್ಷವು 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು;

ಪರಿಹಾರ (i) ಒಂದು ಅಧಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 366. ಅಂದರೆ, 52 ವಾರಗಳು ಮತ್ತು 2 ದಿನಗಳು.

ಈಗ, 52 ವಾರಗಳು 52 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ದಿನಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಏಳು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ಭಾನು, ಸೋಮ), (ಸೋಮ, ಮಂಗಳ), (ಮಂಗಳ, ಬುಧ), (ಬುಧ, ಗುರು), (ಗುರು, ಶುಕ್ರ), (ಶುಕ್ರ, ಶನಿ) ಮತ್ತು (ಶನಿ, ಭಾನು).

ಅಧಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಮೇಲಿನ ಏಳು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, S = {(ಭಾನು, ಸೋಮ), (ಸೋಮ, ಮಂಗಳ), (ಮಂಗಳ, ಬುಧ), (ಬುಧ, ಗುರು), (ಗುರು, ಶುಕ್ರ), (ಶುಕ್ರ, ಶನಿ), (ಶನಿ, ಭಾನು)}. ಆಗ, $n(S) = 7$.

ಉಳಿದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶುಕ್ರವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

A ={ (ಗುರು, ಶುಕ್ರ), (ಶುಕ್ರ, ಶನಿ)}. ಆಗ, $n(A) = 2$.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}.$$

(ii) ಒಂದು ಅಧಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 52 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಡೆಯಲು, ಉಳಿದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವು ಇರಬಾರದು.

ಉಳಿದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವು ಇರದ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

B ={(ಭಾನು, ಸೋಮ),(ಸೋಮ, ಮಂಗಳ),(ಮಂಗಳ, ಬುಧ), (ಬುಧ, ಗುರು), (ಶನಿ, ಭಾನು)}.

$n(B) = 5$.

ಈಗ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}$.

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(iii) ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಇರುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 365. ಅಂದರೆ, 52 ವಾರಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನ.

ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ಏಳು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶುಕ್ರವಾರವು ಇರಲೇಬೇಕು. ಭಾನು, ಸೋಮ, ಮಂಗಳ, ಬುಧ, ಗುರು, ಶುಕ್ರ ಮತ್ತು ಶನಿ.

ಇಲ್ಲಿ, S = {ಭಾನು, ಸೋಮ, ಮಂಗಳ, ಬುಧ, ಗುರು, ಶುಕ್ರ, ಶನಿ}.

$\therefore \quad n(S) = 7$.

ಉಳಿದ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

C = {ಶುಕ್ರ} $\Longrightarrow n(C) = 1$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.11

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ ಆಗುವಂತೆ A ಯು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾದರೆ, $P(A)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$P(A) = 7k$ ಮತ್ತು $P(\overline{A}) = 12k,\ k > 0$ ಆಗಿರಲಿ.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆಗ,

$7k + 12k = 1 \Longrightarrow 19k = 1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $k = \frac{1}{19}$

$\therefore \quad P(A) = 7k = \frac{7}{19}$.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{7}{12}$$

$$12P(A) = 7 \times P(\overline{A})$$
$$= 7\,[1 - P(A)]$$

$$19P(A) = 7$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A) = \frac{7}{19}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12. 1

1. ಒಂದರಿಂದ ನೂರರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರುವ 100 ಚೀಟಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ ಒಂದು ಚೀಟಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು 10 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚೀಟಿಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೊತ್ತ 9 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಾದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 12 ಉತ್ತಮ ಮೊಟ್ಟೆಗಳೊಂದಿಗೆ 3 ಕೊಳೆತ ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೊಟ್ಟೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಕೊಳೆತ ಮೊಟ್ಟೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?
5. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?
6. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲಸಿದ 52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಅದು (i) ಡೈಮಂಡ್ (ii) ಡೈಮಂಡ್ ಅಲ್ಲದ (iii) ಏಸ್ ಅಲ್ಲದ ಎಲೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, (i) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರ (ii) ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಪುಚ್ಛ (iii) ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 1 ರಿಂದ 6 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುವ 6 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 7 ರಿಂದ 10 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುವ 4 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದು

   (i) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚೆಂಡು (ii) ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. 1 ರಿಂದ 100 ರವರೆಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಅದು (i) ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವ (ii) ಪೂರ್ಣ ಘನವಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಬ್ಬ ಪ್ರವಾಸಿಗನು ದೃಶ್ಯಾವಳಿಯನ್ನು ನೋಡಲು ಪ್ರವಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಅರ್ಜೆಂಟೀನ, ಬಾಂಗ್ಲಾದೇಶ, ಚೀನ, ಅಂಗೋಲಾ, ರಷ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅಲ್ಜೀರಿಯಾ ದೇಶಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದೇಶವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡನು. ಆಯ್ಕೆಯಾದ ದೇಶವು 'ಅ' ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?
11. 4 ಹಸಿರು, 5 ನೀಲಿ ಮತ್ತು 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು (i) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ (ii) ಹಸಿರು ಬಣ್ಣವಲ್ಲದ, ಚೆಂಡಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 1 ರಿಂದ 20 ರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರುವ 20 ಕಾರ್ಡುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು,

    (i) 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ii) 6 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. 3, 5 ಮತ್ತು 7 ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 57 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಅಂಕಿಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಲು ಅವಕಾಶವಿರುವುದಿಲ್ಲ).
14. ಮೂರು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೂರು ದಾಳಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ (ಸಂಖ್ಯೆಗಳ) ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಪಡೆಯುವ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

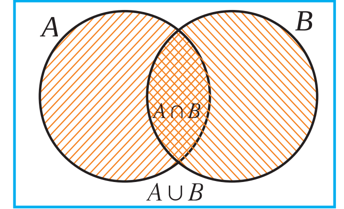
16. ಒಂದು ಜಾಡಿಯು ನೀಲಿ, ಹಸಿರು ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ 54 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ನೀಲಿ ಗೋಲಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{4}{9}$ ಆದರೆ, ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳೆಷ್ಟು?

17. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 100 ಅಂಗಿಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಅಂಗಿಗಳು ಉತ್ತಮ, 8 ಅಂಗಿಗಳು ಕಡಿಮೆ ದೋಷಯುಕ್ತ ಮತ್ತು 4 ಅಂಗಿಗಳು ಅಧಿಕ ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. A ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಅಂಗಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ B ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಅಧಿಕ ದೋಷಯುಕ್ತ ಅಂಗಿಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಅಂಗಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದನ್ನು (i) A (ii) B ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

18. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 12 ಚೆಂಡುಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ x ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. (i) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು ಬಿಳಿ ಚೆಂಡಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು? (ii) ಬ್ಯಾಗಿನೊಳಗೆ ಪುನಃ 6 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ, ಬಿಳಿ ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು (i) ರಲ್ಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ, x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಪಿಗ್ಗಿ ಬ್ಯಾಂಕು 100 ಐವತ್ತು–ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, 50 ಒಂದು–ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, 20 ಎರಡು –ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 10 ಐದು–ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದು (i) ಐವತ್ತು–ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಐದು–ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯವಾಗದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12.3 ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ (Addition theorem on probability)



ಚಿತ್ರ 12.5

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪರಿಮಿತ ಗಣ S ನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

ಎರಡೂ ಕಡೆ $n(S)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \qquad (1)$$

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ A ಮತ್ತು B ಉಪಗಣಗಳು ಅನುಗುಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ಗೆ S ಗಣವು ಅನುಗುಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (1)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) A ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ B ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, $A \cup B$ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿತು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳೂ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, $A \cap B$ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿತು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

(ii) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $A \cap B = \emptyset$ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \because P(A \cap B) = 0$.

(iii) ಗಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ, $A \cap \overline{B}$ ಎಂಬುದು $A \setminus B$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (ಸಾಧನೆ ರಹಿತವಾಗಿ)

(i) A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ನೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಯಾವುದೇ 3 ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

(ii) A_1, A_2 ಮತ್ತು A_3 ಗಳು ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

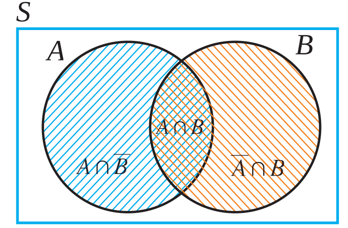
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n).$$

(iv) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$,

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

ಇಲ್ಲಿ, $A \cap \overline{B}$ ಎಂದರೆ A ಮಾತ್ರ B ಅಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ;

ಇದೇ ರೀತಿ, $\overline{A} \cap B$ ಎಂದರೆ B ಮಾತ್ರ A ಅಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ;



ಚಿತ್ರ 12.6

ಉದಾಹರಣೆ 12.12

ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲಿನ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ, $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$.

ಇದರಿಂದ, $n(S) = 8$.

ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = \{HTT, TTH, THT\}$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $n(A) = 3$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $n(B) = 7$.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}.$$

ಈಗ, A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಲ್ಲ.

$A \cap B = A$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{3}{8}$.

$\therefore$ $P(A$ ಅಥವಾ $B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ನಾವು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, $A \cup B = B$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A \cup B) = P(B) = \frac{7}{8}$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.13

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ).

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದ ಗಾತ್ರ, $n(S) = 36$.

ಮೊದಲ ಎಸೆತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(A) = 6$ ಮತ್ತು $P(A) = \frac{6}{36}$.

ಎರಡನೇ ಎಸೆತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(B) = 6$ ಮತ್ತು $P(B) = \frac{6}{36}$.

A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $A \cap B = \{(5,5)\}$.

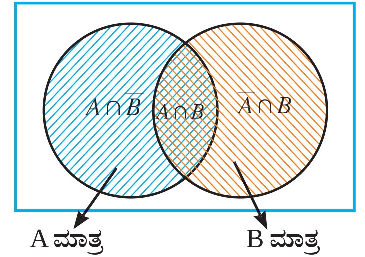
$\therefore \quad n(A \cap B) = 1$ ಮತ್ತು $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

$\therefore$ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.14



ಚಿತ್ರ 12.7

ಒಂದು ವೈದ್ಯಕೀಯ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ದಾಖಲಾತಿಗೆ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.16, ಅವಳು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.24 ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.11 ಆದರೆ, ಅವಳು

(i) ಎರಡು ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ವೈದ್ಯಕೀಯ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅಥವಾ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

(i) $P(A) = 0.16$, $P(B) = 0.24$ ಮತ್ತು $P(A \cap B) = 0.11$

ಎರಡು ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29.$$

(ii) ಎರಡು ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$= P$ (A ಮಾತ್ರ ಅಥವಾ B ಮಾತ್ರ)

$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$

$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.15

"ENTERTAINMENT" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದು ಸ್ವರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ ಅಥವಾ T ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಅಕ್ಷರಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಅವಕಾಶವಿರುತ್ತದೆ)

ಪರಿಹಾರ "ENTERTAINMENT" ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿ 13 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ.

$\therefore \quad n(S) = 13.$

ಸ್ವರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad n(A) = 5.$

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{13}.$

T ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad n(B) = 3$

ಇದರಿಂದ, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{13}.$

ಆಗ, $P(A$ ಅಥವಾ $B) = P(A) + P(B)$ $\quad \because$ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

$= \dfrac{5}{13} + \dfrac{3}{13} = \dfrac{8}{13}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.16

A, B ಮತ್ತು C ಗಳು $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$ ಮತ್ತು $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮತ್ತು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(A)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $P(A) = p$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $P(B) = \dfrac{3}{2}P(A) = \dfrac{3}{2}p.$

ಹಾಗೂ, $P(C) = \dfrac{1}{2}P(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}p\right) = \dfrac{3}{4}p.$

A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮತ್ತು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳು ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ಮತ್ತು $S = A \cup B \cup C$.

ಈಗ, $P(S) = 1.$

ಅಂದರೆ, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$\Longrightarrow \quad p + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}p = 1$

$\Longrightarrow \quad 4p + 6p + 3p = 4$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p = \frac{4}{13}$.

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \frac{4}{13}$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.17

52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ರಾಜ ಅಥವಾ ಹಾರ್ಟ್ ಅಥವಾ ಕೆಂಪು ಎಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ರಾಜ ಎಲೆ, ಹಾರ್ಟ್ ಎಲೆ, ಕೆಂಪು ಎಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $n(S) = 52$, $n(A) = 4$, $n(B) = 13$, $n(C) = 26$. ಹಾಗೂ,

$n(A \cap B) = 1$, $n(B \cap C) = 13$, $n(C \cap A) = 2$ ಮತ್ತು $n(A \cap B \cap C) = 1$.

$\therefore \; P(A) = \frac{4}{52}, \; P(B) = \frac{13}{52}, \; P(C) = \frac{26}{52}$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}, \; P(B \cap C) = \frac{13}{52}, \; P(C \cap A) = \frac{2}{52}$ ಮತ್ತು $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{52}$.

ಈಗ, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{26}{52} - \frac{1}{52} - \frac{13}{52} - \frac{2}{52} + \frac{1}{52} = \frac{44 - 16}{52}$$

$$= \frac{7}{13}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.18

ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 10 ಬಿಳಿ, 5 ಕಪ್ಪು, 3 ಹಸಿರು ಮತ್ತು 2 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದು ಬಿಳಿ ಅಥವಾ ಕಪ್ಪು ಅಥವಾ ಹಸಿರು ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ S ಎಂಬುದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad n(S) = 20$.

W, B ಮತ್ತು G ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಳಿ, ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{10}{20}$.

ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{20}$.

ಹಸಿರು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{3}{20}$.

$\therefore$ ಬಿಳಿ ಅಥವಾ ಕಪ್ಪು ಅಥವಾ ಹಸಿರು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$P(W \cup B \cup G) = P(W) + P(B) + P(G)$ $\quad \because$ W, B ಮತ್ತು G ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು.

$$= \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{9}{10}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A)=\frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $P(B)=\frac{1}{5}$ ಆಗುವಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $P(A\cup B)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{2}{5}$ ಮತ್ತು $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $P(A\cap B)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{7}{10}, P(A\cup B)=1$. ಆದರೆ, (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A'\cup B')$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಮೊದಲ ಬಾರಿ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಅಥವಾ ಮೊತ್ತವು 8 ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 1 ರಿಂದ 50 ರವರೆಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದು 4 ಅಥವಾ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗು 50 ಬೋಲ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 150 ನಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಬೋಲ್ಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಅರ್ಧದಷ್ಟು ನಟ್ಟುಗಳು ತುಕ್ಕು ಹಿಡಿದಿವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ಅದು ತುಕ್ಕು ಹಿಡಿದಿರುವ ಅಥವಾ ಬೋಲ್ಟ್ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ದಾಳಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 3 ಮತ್ತು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯು 20 ಸೇಬುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 10 ಕಿತ್ತಳೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 5 ಸೇಬುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಿತ್ತಳೆಗಳು ಕೊಳೆತಿವೆ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಹಣ್ಣನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಸೇಬು ಆಗಿರುವ ಅಥವಾ ಒಳ್ಳೆಯ ಹಣ್ಣು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 40% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, 30% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿಜ್ಞಾನ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, 10% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಎರಡೂ ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಣಿತ ಅಥವಾ ವಿಜ್ಞಾನ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲಸಿದ 52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ಸ್ಪೇಡ್ ಅಥವಾ ರಾಜ ಎಲೆ ಆಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು 10 ಬಿಳಿ, 6 ಕೆಂಪು ಮತ್ತು 10 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಬಿಳಿ ಅಥವಾ ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 2, 5, 9 ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ (ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಅವಕಾಶವಿರುತ್ತದೆ). ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. "ACCOMMODATION" ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ 13 ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಜಾಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    (i) 'A' ಅಥವಾ 'O' ಅಕ್ಷರದ ಆಯ್ಕೆ (ii) 'M' ಅಥವಾ 'C' ಅಕ್ಷರದ ಆಯ್ಕೆ.

14. ಒಂದು ಹೊಸ ಕಾರು ತನ್ನ ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.25, ಇದು ಇಂಧನವನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.35 ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಪ್ರಶಸ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.15 ಆಗಿದೆ. ಇದು
   (i) ಎರಡರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನಾದರೂ ಪಡೆಯುವ;
   (ii) ಒಂದು ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಡೆಯುವ, ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{7}$ ಆಗಿವೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{8}{15}$, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{2}{7}$ ಹಾಗೂ A ಮತ್ತು C ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{12}{35}$ ಆಗಿದೆ. ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮೂವರು ಸೇರಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{8}{35}$ ಆಗಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯು ಅವರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಬ್ಬರಿಂದ ಪರಿಹಾರವಾಗಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.3

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ϕ ಎಂಬುದು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯಾದರೆ, $P(\phi) =$
   (A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

2. S ಎಂಬುದು ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವಾದರೆ, $P(S) =$
   (A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. p ಎಂಬುದು A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ p ಯು
   (A) $0 < p < 1$ (B) $0 \leq p \leq 1$ (C) $0 \leq p < 1$ (D) $0 < p \leq 1$

4. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಹಾಗೂ S ಎಂಬುದು ಅನುಗುಣವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $P(\overline{A} \cap B) =$
   (A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$
   (C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

5. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಶೇಕಡ 100 ರಷ್ಟು ಅಂಕವನ್ನು ಗಳಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{4}{5}$ ಆಗಿದೆ. ಅವನು ಶೇಕಡ 100 ರಷ್ಟು ಅಂಕವನ್ನು ಗಳಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು
   (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

6. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A) = 0.25, P(B) = 0.05$ ಮತ್ತು $P(A \cap B) = 0.14$ ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ $P(A \cup B) =$
   (A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

7. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 20 ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 6 ವಸ್ತುಗಳು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರದ (ದೋಷರಹಿತವಾಗಿರುವ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯು
   (A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ ಮತ್ತು $S = A \cup B$ ಆಗುವಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಹಾಗೂ S ಎಂಬುದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವಾದರೆ, ಆಗ $P(A) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

9. A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ಮತ್ತು $\frac{5}{12}$ ಆಗಿವೆ. ಆಗ $P(A \cup B \cup C)$ ಯು

(A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

10. $P(A) = 0.25, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.14$ ಆದರೆ, P(A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಆಗಿರದ) =

(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

11. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳು, 4 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಾಗ, ದ್ವಿವಳಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

13. ಒಂದು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

14. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, 3 ಶಿರ ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

15. 52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಏಸ್ ಎಲೆ ಮತ್ತು ರಾಜ ಎಲೆ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

16. ಒಂದು ಅಧಿಕ ವರ್ಷವು 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಅಥವಾ 53 ಶನಿವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

17. ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ಒಂದು ವರ್ಷವು 53 ಭಾನುವಾರಗಳನ್ನು ಅಥವಾ 53 ಸೋಮವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

18. 52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಅದು ಹಾರ್ಟ್‌ಗಳ ಒಂದು ರಾಣಿ ಎಲೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

19. ಖಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

20. ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಪಲಿತಾಂಶವು ಗೆಲುವು ಅಥವಾ ಸೋಲು ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಗೆಲುವಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಸೋಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಗೆಲುವಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

ಉತ್ತರಗಳು

1. ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

2. (i) A (ii) ϕ **3.** (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

2. (i) $A' \cup (A \cap B)$ ಅಥವಾ $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. 300 **2.** 430 **3.** 35 **5.** 100 **6.** 30 **7.** (i) 10 (ii) 25 (iii) 15

8. (i) 450 (ii) 3550 (iii) 1850 **9.** 15

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. (i) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (ii) ಉತ್ಪನ್ನ **2.** ಕ್ಷೇತ್ರ ={1, 2, 3, 4, 5}; ವ್ಯಾಪ್ತಿ ={1, 3, 5, 7, 9}

3. (i) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (ii) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ

4. (i) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (ii) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (iv) ಉಭಯಕ್ಷೇಪ

5. $a = -2,\ b = -5,\ c = 8,\ d = -1$ **6.** ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$; f ಎಂಬುದು A ನಿಂದ A ಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

7. ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ **8.** (i) 12 ಮತ್ತು 4 (ii) 13 ಮತ್ತು 15 **9.** $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5, -7), (6, -9), (7, -11), (8, -13)\}$

(ii) ಸಹ–ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$

(iii) ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ

11. (i) ಉತ್ಪನ್ನ (ii) ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (iv) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (v) ಉತ್ಪನ್ನ

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6,1), (9,2), (15,4), (18,5), (21,6)\}$

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3),(6,4),(8,5),(10,6)\}$

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 16 (ii) –32 (iii) 5 (iv) $\frac{2}{3}$ 16. (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	A	A	B	A	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	A	D	D	B	A	C

2. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27, 81, -243$ (iii) $-\frac{3}{4}, 2, -\frac{15}{4}$
2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) –1536, 18432 (iii) 36, 78 (iv) –21,57
3. 378, $\frac{25}{313}$ 4. 195, 256 5. 2, 5, 15, 35, 75 6. 1, 1, 1, 2, 3, 5

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. A.P : 6, 11, 16, $\cdots$; ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವು $5n+1$ ಆಗಿದೆ. 2. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ –5, $t_{15} = 55$
3. $t_{29} = 3$ 4. $t_{12} = 23\sqrt{2}$ 5. $t_{17} = 84$ 6. (i) 27 ಪದಗಳು (ii) 34 ಪದಗಳು
8. $t_{27} = 109$ 9. $n = 10$ 10. 7 11. ಮೊದಲ ವರ್ಷ : 100, $t_{15} = 2200$
12. 2560 13. 10, 2, –6 ಅಥವಾ –6, 2, 10 14. 2, 6, 10 ಅಥವಾ 10, 6, 2 16. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ, ₹91,500

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. (i) $r = 2$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (ii) $r = 5$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ
   (iii) $r = \frac{2}{3}$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (iv) $r = \frac{1}{12}$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ
   (v) $r = \frac{1}{2}$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (vi) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.
2. -2^7 3. 2, 6, 18 , $\cdots$ 4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ 5. (i) $n = 8$ (ii) $n = 11$ 6. $n = 5$ 7. $r = 5$
8. $r = \frac{5}{2}$ (ಅಥವಾ) $\frac{2}{5}$; ಪದಗಳು : $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$. (ಅಥವಾ) $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. 9. 18, 6, 2 (ಅಥವಾ) 2, 6, 18
10. 4,2,1(ಅಥವಾ)1,2,4 11. $1, 3, 9, \cdots$ (ಅಥವಾ) $9, 3, 1, \cdots$ 12. ₹$1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ 13. ₹$50,000 \times \left(\frac{55}{100}\right)^{15}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 2. 1020 3. (i) 260 (ii) 375 4. (i) 1890 (ii) 50 5. –3240
6. $\frac{39}{11} + \frac{40}{11} + \frac{41}{11} + \cdots$ 7. 8 ಪದಗಳು 8. 55350 9. 740 10. 7227 11. 36
12. 13995 13. 15 ದಿನಗಳು 14. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಡಿ, ₹37,200 15. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ
16. 156 ಬಾರಿ 20. 3625 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. $s_{20} = \frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ **2.** $s_{27} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ **3.** (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12}-1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1)^{10}}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20}-1)-\frac{20}{9}$ **5.** (i) $n = 6$ (ii) $n = 6$ **6.** $\frac{75}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3+6+12+\cdots$ **8.** (i) $\frac{70}{81}[10^n-1]-\frac{7n}{9}$ (ii) $1-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15} = \frac{5(4^{15}-1)}{3}$ **10.** 2 ನೆಯ ಆಯ್ಕೆ ; ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1023. **11.** $r = 2$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10630 (vi) 382500

2. (i) $k = 12$ (ii) $k = 9$ **3.** 29241 **4.** 91 **5.** 3818 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** 201825 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	C	D	D	A	B	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	B	D	A	B	B	A	C	A

3. ಬೀಜಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. $4, \frac{3}{2}$ **2.** 1 , 5 **3.** 3 , 2 **4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ **5.** 1 , 5 **6.** $\frac{11}{23}, \frac{22}{31}$

7. 2 , 4 **8.** 2 , 1 **9.** $5, \frac{1}{7}$ **10.** 6 , – 4

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. (i) 4 , 3 (ii) 0.4, 0.3 (iii) 2 , 3 (iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (vi) 720 ಕಿ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. (i) 4, – 2 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (iv) 0, – 2 (v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3}, 1$

(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) – 13, 11

2. (i) x^2-3x+1 (ii) x^2-2x+4 (iii) x^2+4 (iv) $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{5}$

(v) $x^2-\frac{x}{3}+1$ (vi) $x^2-\frac{x}{2}-4$ (vii) $x^2-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$ (viii) $x^2-\sqrt{3}x+2$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. (i) $x^2+2x-1,\ 4$ (ii) $3x^2-11x+40,\ -125$ (iii) $x^2+2x-2,\ 2$

(iv) $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9},\ -\frac{50}{9}$ (v) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x+\frac{51}{32},\ -\frac{211}{32}$

(vi) $x^3-3x^2-8x+\frac{55}{2},\ -\frac{41}{2}$

2. $a = -6,\ b = 11$, ಶೇಷವು 5. **3.** $p = -2,\ q = 0$, ಶೇಷವು – 10.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$

(iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$

(vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$

(x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$

2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$

(vi) $2x+1$ (vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$

3. (i) $4x^2-16x+12$ (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

ಅಭ್ಯಾಸ 3.7

1. x^3y^2z **2.** $12x^3y^3z$ **3.** $a^2b^2c^2$ **4.** $264a^4b^4c^4$ **5.** a^{m+3}

6. $xy(x+y)$ **7.** $6(a-1)^2(a+1)$ **8.** $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$

9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ **10.** $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$

(iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$

2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

(iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.9

1. (i) $\frac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$

(v) x^2-x+1 (vi) $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$

(ix) $\frac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\frac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\frac{x+9}{x-2}$ (iii) $\frac{1}{x+4}$ (iv) $\frac{1}{x-1}$ (v) $\frac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1

2. (i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-6}{x-7}$ (iii) $\frac{x+1}{x-5}$ (iv) $\frac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\frac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.11

1. (i) x^2+2x+4 (ii) $\frac{2}{x+1}$ (iii) $\frac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\frac{2}{x-5}$

(v) $\frac{x+1}{x-2}$ (vi) $\frac{4}{x+4}$ (vii) $\frac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\frac{2x^3+2x^2+5}{x^2+2}$ **3.** $\frac{5x^2-7x+6}{2x-1}$ **4.** 1

ಅಭ್ಯಾಸ 3.12

1. (i) $14|a^3b^4c^5|$ (ii) $17|(a-b)^2(b-c)^3|$ (iii) $|x-11|$

(iv) $|x+y|$ (v) $\frac{11}{9}\left|\frac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\frac{8}{5}\left|\frac{(a+b)^2(x-y)^4(b-c)^3}{(x+y)^2(a-b)^3(b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x-3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x-3y-5z|$

(iv) $\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.13

1. (i) $|x^2-2x+3|$ (ii) $|2x^2+2x+1|$ (iii) $|3x^2-x+1|$ (iv) $|4x^2-3x+2|$

2. (i) $a=-42, b=49$ (ii) $a=12, b=9$ (iii) $a=49, b=-70$ (iv) $a=9,\ b=-12$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.14

1. $\{-6,3\}$ **2.** $\left\{-\frac{4}{3},3\right\}$ **3.** $\left\{-\sqrt{5},\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ **4.** $\left\{-\frac{3}{2},5\right\}$ **5.** $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$

6. $\left\{5,\frac{1}{5}\right\}$ **7.** $\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{1}{b^2},\frac{1}{a^2}\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{5}{2},3\right\}$ **10.** $\left\{7,\frac{8}{3}\right\}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.15

1. (i) $\{-7,1\}$ (ii) $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\frac{a-b}{2},-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3},1\}$ (vi) $\{-1,3\}$

2. (i) $\{4,3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{2b}{3a},\frac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\frac{1}{a},a\right\}$ (vi) $\left\{\frac{a+b}{6},\frac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\frac{(9+\sqrt{769})}{8},\frac{(9-\sqrt{769})}{8}$ (viii) $\left\{-1,\frac{b^2}{a^2}\right\}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.16

1. 8 ಅಥವಾ $\frac{1}{8}$ **2.** 9 ಮತ್ತು 6 **3.** 20 ಮೀ., 5 ಮೀ. ಅಥವಾ 10 ಮೀ., 10 ಮೀ. **4.** $\frac{3}{2}$ ಮೀ.

5. 45 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. **6.** 5 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. **7.** 49 ವರ್ಷಗಳು, 7 ವರ್ಷಗಳು **8.** 24 ಸೆಂ.ಮೀ. **9.** 12 ದಿನಗಳು

10. ಮೊದಲನೆಯ ರೈಲಿನ ವೇಗ = 20 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರೈಲಿನ ವೇಗ = 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.17

1. (i) ವಾಸ್ತವ (ii) ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ (iii) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ (iv) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ (v) ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ (vi) ವಾಸ್ತವ
2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 ಅಥವಾ 1 (iv) 0 ಅಥವಾ 3

ಅಭ್ಯಾಸ 3.18

1. (i) 6,5 (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$
2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$
3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ **4.** $\frac{4}{3}$ **5.** $4x^2 - 29x + 25 = 0$
6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ **7.** $x^2 - 11x + 1 = 0$ **8.** (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$ **9.** $x^2 + 3x - 4 = 0$
10. $k = -18$ **11.** $a = \pm 24$ **12.** $p = \pm 3\sqrt{5}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4. ಮಾತೃಕೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}, 3\times 2, 2\times 3$ **2.** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$
3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2
4. $1\times 8,\ 8\times 1,\ 2\times 4,\ 4\times 2$
5. $1\times 30, 30\times 1, 2\times 15, 15\times 2, 3\times 10, 10\times 3, 5\times 6, 6\times 5, 10\times 1, 1\times 10, 15\times 1, 1\times 15$
6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **7.** (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$
8. (i) 3×4 (ii) 4, 0 (iii) 2 ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು 3 ನೇ ಕಂಬಸಾಲು **9.** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. $x = 2,\ y = -4,\ z = -1$ **2.** $x = 4,\ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ **6.** $a = 3,\ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $x = -3, -3,\ y = -1, 4$

11. (ಟಿವಿ, ಡಿವಿಡಿ, ವೀಡಿಯೋ, ಸೀಡಿ) $\begin{pmatrix} 55 & 27 & 20 & 16 \\ 72 & 30 & 25 & 27 \\ 47 & 33 & 18 & 22 \end{pmatrix}$ ಮಳಿಗೆ I, ಮಳಿಗೆ II, ಮಳಿಗೆ III

12. (ಮಕ್ಕಳು, ವಯಸ್ಕರು) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರೊಳಗೆ, ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರ ನಂತರ

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. (i) 4×2 (ii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix}$ ದಿನ I, ದಿನ II, ದಿನ III, (5000) **4.** $x = 3,\ y = 0$ **5.** $x = 2,\ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix},\ AB \neq BA$ **11.** $x = -3, 5$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	D	B	D	B	C	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	B	C	B	A	C	B	D

5. ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. (i) (–2, 1) (ii) (0,2) **2.** (i) (5,–2) (ii) (2, –1) **3.** (–12, 8)

4. (2, –2) **6.** (–24,–2) **7.** (–2, 3) **8.** (–6,–3) **9.** (–1, 0), (–4, 2)

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right),\ (-2, 3),\ \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ **11.** 4 : 7 ಆಂತರಿಕವಾಗಿ

12. 5:2 ಆಂತರಿಕವಾಗಿ, $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ **13.** $\frac{\sqrt{130}}{2},\ \sqrt{13},\ \frac{\sqrt{130}}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. (i) 3 ಚ. ಮಾನಗಳು (ii) 32 ಚ. ಮಾನಗಳು (iii) 19 ಚ. ಮಾನಗಳು

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ (ii) ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿಲ್ಲ (iii) ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ

4. (i) k = 1 (ii) k = 2 (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 ಚ. ಮಾನಗಳು (ii) 8 ಚ. ಮಾನಗಳು (iii) 60.5 ಚ. ಮಾನಗಳು 7. 1 ಚ. ಮಾನಗಳು, 1 : 4

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° 2. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ

3. (i) 1 (ii) –2 (iii) 1 4. (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ 6. (i) 0 (ii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ (iii) 1 7. $\sqrt{3}$, 0 10. $a = -1$

11. $b = 6$ 12. $-\frac{9}{10}$ 13. $\frac{11}{7}$, -13, $-\frac{1}{4}$ 14. $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ 2. $y = -2$, $x = -5$ 3. (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

4. $x - 2y + 6 = 0$ 5. (i) ಪ್ರವಣತೆ 1, y-ಛೇದಕ 1 (ii) ಪ್ರವಣತೆ $\frac{5}{3}$, y-ಛೇದಕ 0

(iii) ಪ್ರವಣತೆ 2, y-ಛೇದಕ $\frac{1}{2}$ (iv) ಪ್ರವಣತೆ $-\frac{2}{3}$, y-ಛೇದಕ $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ 7. $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ 9. $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3,5 (ii) –8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$, 13. $2x + 3y - 18 = 0$

14. $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ 15. $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ 17. $2x + 3y - 12 = 0$ 18. $x + 2y - 10 = 0$, $6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ 20. $3x - 2y + 4 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ 4. $a = 6$ 5. $a = 5$ 6. $p = 1,2$ 7. $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ 9. $2x + y = 0$ 10. $2x + y - 5 = 0$ 11. $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ 13. $x + 3y - 7 = 0$ 14. $x - 3y + 6 = 0$

15. $x - 4y + 20 = 0$ 16. (3, 2) 17. 5 ಮೂಲಮಾನಗಳು 18. $x + 2y - 5 = 0$

19. $2x + 3y - 9 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	A	B	D	A	D	C	C	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	C	C	D	B	B	D	A	A	B	B	

6. ರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. (i) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (iii) 1 **2.** (i) ಇಲ್ಲ (ii) ಹೌದು **3.** 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ.
4. 10.5 ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** 12 ಸೆಂ.ಮೀ., 10 ಸೆಂ.ಮೀ. **9.** (i) 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) 5.8 ಸೆಂ.ಮೀ. (iii) 4
10. (i) ಹೌದು (ii) ಇಲ್ಲ **11.** 18 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. (i) $x = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. $y = 9$ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) $x = 3.6$ಸೆಂ.ಮೀ., $y = 2.4$ಸೆಂ.ಮೀ., $z = 10$ಸೆಂ.ಮೀ.
(iii) $x = 8.4$ಸೆಂ.ಮೀ., $y = 2.5$ಸೆಂ.ಮೀ. **2.** 3.6 ಮೀ. **3.** 1.2 ಮೀ. **4.** 140 ಮೀ.
6. 6ಸೆಂ.ಮೀ. **7.** 64 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **8.** 166.25 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **9.** (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ **10.** 6.3 ಚ.ಕಿ.ಮೀ.
11. 72ಸೆಂ.ಮೀ. **12.** 9 ಮೀ. **13.** (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. 65° **2.** (i) 4 (ii) 12 **3.** (i) 12 (ii) 1 **6.** 30 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

7. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. (i) ಇಲ್ಲ (ii) ಇಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. 1.8 ಮೀ. **2.** 30° **3.** ಇಲ್ಲ **4.** 174.7 ಮೀ. **5.** 40 ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** B ಕಾಗೆ
7. $5\sqrt{6}$ ಮೀ. **8.** 1912.40 ಮೀ. **9.** $30\sqrt{2}$ ಮೀ. **10.** 1.098 ಮೀ. **11.** $19\sqrt{3}$ ಮೀ.
12. ಹೌದು **13.** 87 ಮೀ. **14.** 3 ನಿಮಿಷಗಳು **15.** 3464 ಕಿ.ಮೀ. **16.** 40 ಮೀ.
17. 60 ಮೀ. ; $40\sqrt{3}$ ಮೀ. **18.** 90 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	A	B	A	A	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	A	D	C	C	D	B	B	D

8. ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 1936 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 2. $h = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., 352 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.
3. $h = 40$ ಸೆಂ.ಮೀ., d = 35 ಸೆಂ.ಮೀ. 4. ₹2640 5. $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., h = 7 ಸೆಂ.ಮೀ.
6. $h = 28$ ಸೆಂ.ಮೀ. 7. $C_1 : C_2 = 5 : 2$ 8. 612π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.
9. 3168 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 10. 550 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.
11. $h = 15\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ., $l = 30$ ಸೆಂ.ಮೀ. 12. 1416 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 13. 23.1 ಚ.ಮೀ.
14. 10.5 ಸೆಂ.ಮೀ. 15. $301\frac{5}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 16. 2.8 ಸೆಂ.ಮೀ.
17. 4158 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 18. $C_1 : C_2 = 9 : 25$, $T_1 : T_2 = 9 : 25$
19. 44.1π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 57.33π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 20. ₹246.40

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. 18480 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 2. 38.5 ಲೀಟರ್‌ಗಳು 3. 4620 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 4. $r = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.
5. $V_1 : V_2 = 20 : 27$ 6. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. 7. 4158 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 8. 7.04 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.
9. 26400 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 10. 1848 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 11. 5 ಸೆಂ.ಮೀ. 12. 1408.6 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.
13. $314\frac{2}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 14. $2\sqrt{13}$ ಸೆಂ.ಮೀ. 15. 8 ಸೆಂ.ಮೀ. 16. 2.29 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.
17. $3050\frac{2}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 18. 288π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 19. $718\frac{2}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 20. 1: 8

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. 11.88π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. 2. 7623 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. 3. 70π ಚ.ಮಿ.ಮೀ. 4. 1034 ಚ.ಮೀ.
5. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. 6. 12.8 ಕಿ.ಮೀ. 7. 2 ಸೆಂ.ಮೀ. 8. 1 ಸೆಂ.ಮೀ.
9. 1386 ಲೀಟರ್‌ಗಳು 10. 3 ಗಂ. 12 ನಿ. 11. 16 ಸೆಂ.ಮೀ. 12. 16 ಸೆಂ.ಮೀ.
13. 750 ಸತುವಿನ ಗುಂಡುಗಳು 14. 10 ಶಂಕುಗಳು 15. 70 ಸೆಂ.ಮೀ.
16. $r = 36$ ಸೆಂ.ಮೀ., $l = 12\sqrt{13}$ ಸೆಂ.ಮೀ. 17. 11 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	A	A	B	C	A	B	D	C	C
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	D	B	D	B	C	B	D	A	D	C

10. ನಕ್ಷೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$
3. {–1, 5} 4. {–2, 3} 5. {–2.5, 2} 6. {–3, 5} 7. ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. 120 ಕಿ.ಮೀ.ಗಳು 2. (i) ₹105 (ii) 11 ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳು 3. (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$
4. (i) $k = 15$ (ii) ₹ 45 5. $y = 4$; $x = 2$ 6. 24 ದಿನಗಳು

11. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 **2.** 71 **3.** 3.38 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ **4.** $2\sqrt{5}$, 20 **5.** 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 **7.** 31.61 **8.** 1.107 **9.** 15.08

10. 36.76, 6.06 **11.** 416, 20. 39 **12.** 53.5 **13.** 4800, 240400 **14.** 10.2, 1.99

15. 25 **16.** 20.43 **17.** 12 **18.** 5.24 **19.** 1159, 70

20. *A* ಯು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	C	C	B	A	B
11	12	13	14	15					
D	B	C	D	B					

12. ಸಂಭವನೀಯತೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. $\frac{1}{10}$ **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{5}$ **5.** $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ **7.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$

8. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$ **9.** (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{1}{36}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **18.** 3 **19.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{5}{9}$ **5.** $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ **7.** $\frac{4}{9}$ **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{3}{5}$ **10.** $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ **14.** (i) 0.45 (ii) 0.3 **15.** $\frac{101}{105}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	A	A	B	A	A	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	B	B	C	D	A	A	B

ಇನ್ನಿತರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು (ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ)

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$ ಆದರೆ, $f(2x) = \frac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. x ನ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. $\left(\text{ಉತ್ತರ} : x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)$
3. x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\log_{10} 2$, $\log_{10}(2^x - 1)$ ಮತ್ತು $\log_{10}(2^x + 3)$ ಎಂಬ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ? (ಉತ್ತರ : $x = \log_5 2$)
4. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ r ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 15 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 85 ಆಗಿದೆ. $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
5. $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}, n > 1$ ಆದರೆ, $\{b_n\}$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
6. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $17, 21, \cdots$ ಮತ್ತು $16, 21, \cdots$ ಎಂಬ ಎರಡೂ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಎರಡೂ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1$ ಆದರೆ, $\{a_n\}$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
8. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
9. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
10. ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 4ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಮತ್ತು 3 ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಆ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, 3 ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ : 23)
11. 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ನ್ನು ನೀಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ : 1210)
12. ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ : $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \times \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ $\left(\text{ಉತ್ತರ} : \frac{1}{2bc}\right)$
13. $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು $a + b + c < 0$. c ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಸುಳಿವು : $f(x) = 0$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ x ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.) (ಉತ್ತರ: $c < 0$)
14. $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$ ಆಗುವಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $x > 1$)
15. $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. (ಉತ್ತರ : $x = 15$)
16. $\frac{6x_1^2 x_2 - 4x_1^3 + 6x_1 x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1 x_2 + 3x_2^2}$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ. ಇಲ್ಲಿ, x_1 ಮತ್ತು x_2 ಗಳು $x^2 - 5x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ. $\left(\text{ಉತ್ತರ} : -\frac{320}{73}\right)$
17. $\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sec \alpha - 1}{\sin \alpha} = -1$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

18. ಒಂಟೆಗಳ ಹಿಂಡಿನ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟು ಒಂಟೆಗಳನ್ನು ಕಾಡಿನಲ್ಲಿ ನೋಡಲಾಯಿತು. ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲದ ಎರಡರಷ್ಟು ಒಂಟೆಗಳು ಪರ್ವತಗಳೆಡೆಗೆ ಹೋಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 15 ಒಂಟೆಗಳು ನದಿಯ ದಡದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಒಂಟೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: ಒಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 36 ಆಗಿದೆ)

19. ಸ್ಥಿರ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ 30 ಕಿ.ಮೀ. ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ನಂತರ ರೈಲಿನ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ದೋಷವು ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರ ವೇಗವು ಮೂಲ ವೇಗದ $\frac{4}{5}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತು. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ, ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ರೈಲು 45 ನಿಮಿಷಗಳು ತಡವಾಗಿ ತಲುಪಿತು. ದೋಷವು ಇನ್ನೂ 18 ಕಿ.ಮೀ. ಕ್ರಮಿಸಿದ ನಂತರ ಕಂಡುಬಂದಿದ್ದರೆ, ರೈಲು 9 ನಿಮಿಷಗಳು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ತಲುಪುತ್ತಿತ್ತು. ರೈಲಿನ ವೇಗ ಮತ್ತು ಪ್ರಯಾಣದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: ರೈಲಿನ ವೇಗವು 30 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಮತ್ತು ಪ್ರಯಾಣದ ದೂರವು 120 ಕಿ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.)

20. $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$ ಆದರೆ, $\cos^6 - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$ ಮತ್ತು $\sec\theta - \cos\theta = m$ ಆದರೆ, $l^2m^2(l^2 + m^2 + 3) = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

22. ಒಂದು ಪರ್ವತದ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಅದರ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿಯು 45° ಆಗಿದೆ; 30° ಅವನತಿಯ ಪ್ರವಣತೆಯಿಂದಿರುವ ಪರ್ವತವನ್ನು 1000 ಮೀ. ಏರಿದಾಗ ಉನ್ನತಿಯು 60° ಆಗಿದೆ. ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ : 1.366 ಕಿ.ಮೀ.)

23. ಒಂದು ಚೌಕದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನೀಯ ಬಿಂದುಗಳು (3, 4) ಮತ್ತು (1, –1) ಆದರೆ, ಉಳಿದ ಕೋನೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ಮತ್ತು $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$)

24. ಏರಿಕೆಯಾಗುವ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 66, ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 128 ಹಾಗೂ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 126 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿವೆ? (ಉತ್ತರ: 6)

25. ಒಂದು ಗೋಪುರವು ಅದರ ಪಾದದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ α ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು A ನ ಮೇಲಿರುವ b ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನವು β ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು $b\cot\beta\tan\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

26. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಈಜು ಕೊಳವು 40 ಅಡಿ × 20 ಅಡಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಈಜು ಕೊಳದ ಸುತ್ತಲೂ ಸ್ಥಿರ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಆಳವಿರುವ ಅಂಚನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ನಿಖರವಾಗಿ 99 ಘ.ಅಡಿಗಳಷ್ಟು ಕಾಂಕ್ರೀಟನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಿದೆ. ಅಂಚಿನ ಆಳವು 3 ಇಂಚುಗಳಿರಬೇಕಿದ್ದು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಕಾಂಕ್ರೀಟನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿದರೆ, ಅಂಚಿನ ಅಗಲವೇನು? (ಉತ್ತರ:3 ಅಡಿ)

27. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ: $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n})$. (ಉತ್ತರ: $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28. ಎರಡರ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಇಂಚುಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು $2r$ ಇಂಚುಗಳು ಆಗಿರುವ ಮೂರು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಅಂಚು ಯಾವುದೇ ಇನ್ನೊಂದರ ಅಂಚಿನೊಂದಿಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $2\sqrt{2}\,r^2$ ಚ.ಇಂಚುಗಳು)

29. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 8 ಇಂಚುಗಳಾಗಿರುವ ಆರು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತೀಯ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಆರು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಏಳನೆಯ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯು ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಆರು ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿಂದ ಮಧ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $192\sqrt{3}$ ಚ.ಇಂಚುಗಳು)

30. ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಮರದ ತುಂಡಿನಿಂದ ಅದೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಮರದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 76π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

31. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
ಇಲ್ಲಿ, $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Bibliography (ಪರಾಮರ್ಶನ ಗ್ರಂಥಗಳು)

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007
2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009
3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications
4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976
5. Krishnan Namboodiri, Richard G. Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984
6. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications
7. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications
8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010
9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007
10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html
11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G.K. Publications 2010
12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007
13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009
14. D.Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ವಿನ್ಯಾಸ

ವಿಷಯ : ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ   ಸಮಯ: 2.30 ಗಂಟೆಗಳು

ತರಗತಿ : X   ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು: 100

ಕಲಿಕಾ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಳ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ

ಉದ್ದೇಶಗಳು	ಶೇಕಡಾವಾರು
ಜ್ಞಾನ	19
ತಿಳುವಳಿಕೆ	31
ಅನ್ವಯ	23
ಕೌಶಲ	27
ಒಟ್ಟು	100

ಪ್ರಶ್ನೆಯ ವಿಧಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ರೂಪ	ವಿಭಾಗ-A ಅತಿ ಕಿರು ಉತ್ತರ (VSA) (ವಸ್ತುನಿಷ್ಠ)	ವಿಭಾಗ-B ಕಿರು ಉತ್ತರ (SA)	ವಿಭಾಗ-C ದೀರ್ಘ ಉತ್ತರ (LA)	ವಿಭಾಗ-D ಅತಿ ದೀರ್ಘ ಉತ್ತರ (VLA)	ಒಟ್ಟು
ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	15	10	9	2	36
ಅಂಕಗಳು	15	20	45	20	100
ಸಮಯ (ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ)	20	35	65	30	2.30 ಗಂ.

ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಯ ಮಟ್ಟ

ಮಟ್ಟ	ಶೇಕಡಾವಾರು ಅಂಕಗಳು
ಕ್ಲಿಷ್ಟ	12
ಸಾಧಾರಣ	28
ಸುಲಭ	60

ವಿಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ಆಯ್ಕೆಗಳು

ವಿಭಾಗಗಳು	ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು		ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಉತ್ತರಿಸಬೇಕಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು
	ರಿಂದ	ರವರೆಗೆ		
A	1	15	15	15
B	16	30	16 30 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	10
C	31	45	16 45 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	9
D	46		2 ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	1
	47		2 ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	1

ವಸ್ತು ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ

ಅಧ್ಯಾಯದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಅಧ್ಯಾಯ	ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ				ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು
		1 ಅಂಕ	**2 ಅಂಕಗಳು**	**5 ಅಂಕಗಳು**	**10 ಅಂಕಗಳು**	
1	ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	1	2	2		15
2	ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು	2	1	2		14
3	ಬೀಜಗಣಿತ	2	2	3		21
4	ಮಾತೃಕೆಗಳು	1	2	1		10
5	ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	2	2	2		16
6	ರೇಖಾಗಣಿತ	2	1	1		9
7	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	2	2	1		11
8	ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	1	2	2		15
9	ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ				2	20
10	ನಕ್ಷೆಗಳು				2	20
11	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	1	1	1		8
12	ಸಂಭವನೀಯತೆ	1	1	1		8
ಒಟ್ಟು		15	16	16	4	167

ಉದಾಹರಣೆಗಳ, ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಮತ್ತು ರಚಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ವಿತರಣೆ

	ವಿಭಾಗ A (1 ಅಂಕ)	ವಿಭಾಗ B (2 ಅಂಕಗಳು)	ವಿಭಾಗ C (5 ಅಂಕಗಳು)	ವಿಭಾಗ D (10 ಅಂಕಗಳು)	ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು	ಶೇಕಡಾವಾರು
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಂದ	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
ಒಟ್ಟು	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

- ಆವರಣದ ಒಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

1. 1 ರಿಂದ 15 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಬಹು ಆಯ್ಕೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಉತ್ತರಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಒಂದು ಅಂಕ.
2. 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹು ಆಯ್ಕೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ 5 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5, 6 ಮತ್ತು 7 ರ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಭಾಗ - B

1. 16 ರಿಂದ 30 ರವರೆಗಿನ 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಎರಡು ಅಂಕಗಳು.
2. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ 9 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ. 30 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಅಥವಾ ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.
3. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕ್ರಮವು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
4. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಂದ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
5. 30 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5 ಮತ್ತು 8 ರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವಿಭಾಗ - C

1. 31 ರಿಂದ 45 ರವರೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ 9 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಐದು ಅಂಕಗಳು.
2. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ ಯಾವುದೇ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ. 45 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಅಥವಾ ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.
3. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕ್ರಮವು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
4. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಂದ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
5. 45 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5 ಮತ್ತು 8 ರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. 30(a), 30(b), 45(a) ಮತ್ತು 45(b) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5 ಮತ್ತು 8 ರ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿಭಿನ್ನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯೊಂದಿಗೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವಿಭಾಗ - D

1. ಈ ವಿಭಾಗವು 46 ಮತ್ತು 47 ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದು, ಒಂದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 9 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 10 ರಿಂದ, ಒಂದೇ ಅಧ್ಯಾಯದಿಂದ ಇರುವ ಪರ್ಯಾಯ (ಅಥವಾ ರೂಪದ) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಹತ್ತು ಅಂಕಗಳು.
2. ಎರಡೂ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.
3. 46(a), 47(a), 46(b) ಮತ್ತು 47(b) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಅಭ್ಯಾಸದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ನೀಲ ನಕ್ಷೆ - 10ನೆಯ ತರಗತಿ

ಅಧ್ಯಾಯ / ಉದ್ದೇಶ	ಜ್ಞಾನ				ತಿಳುವಳಿಕೆ				ಅನ್ವಯ				ಕೌಶಲ				ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು
	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	
ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	1(1)	2(1)	5(1)			2(1)					5(1)						15
ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)		5(1)						14
ಬೀಜಗಣಿತ		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)	2(1)	5(1)				5(1)		21
ಮಾತೃಕೆಗಳು						4(2)	5(1)		1(1)								10
ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ		2(1)			1(1)	2(1)	5(1)		1(1)		5(1)						16
ರೇಖಾಗಣಿತ					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)								9
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)	2(1)							11
ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	1(1)					2(1)	5(1)			2(1)	5(1)						15
ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ																10(2)	20
ನಕ್ಷೆಗಳು																10(2)	20
ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ			5(1)			2(1)			1(1)								8
ಸಂಭವನೀಯತೆ		2(1)					5(1)		1(1)								8
ಒಟ್ಟು	2(2)	10(5)	20(4)		5(5)	16(8)	30(6)		8(8)	6(3)	25(5)				5(1)	40(4)	167

- ಆವರಣದ ಒಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.
- ಆವರಣದ ಹೊರಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.